4. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 29.10.2012

23. Wo ist die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+\mathrm{i}y) = y^2 \sin x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, komplex differenzierbar, wo holomorph?

24. Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = ax^2 + 2bxy - y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$, harmonisch ist. Geben Sie für alle diese $a, b \in \mathbb{R}$ jeweils alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, für die $\Re f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y)$ ist.

25. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, mit

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

stetig ist. Gelten die Cauchy–Riemannschen Gleichungen in $(0,0)$? Ist f komplex differenzierbar in $(0,0)$?

26. Sei $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ eine Funktion gegeben durch $f(r,\varphi) = u(r,\varphi) + \mathrm{i}v(r,\varphi)$, wobei $r = r(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi = \varphi(z)$ das Argument von $z \in \mathbb{C}^*$ aus der Menge $(-\pi, \pi]$ ist, und $u, v\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen sind. Wie lauten die Cauchy–Riemannschen Gleichungen in dieser Situation? (Hinweis: Verwenden Sie die Übungsaufgabe 2.)

27. Sei D ein Bereich in $\mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f in D genau dann lokal konstant ist, wenn $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$. (Hinweis: Ist $u\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $u_x = 0$ und $u_y = 0$ (d.h. $u_x(z) = 0 = u_y(z)$ für alle $z \in D$), dann ist u lokal konstant in D.)