3. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 22.10.2012

13. Bestimmen Sie die Nullstellen des komplexen Polynoms
$$x^3 - (9+12\mathrm{i})x^2 - (21-64\mathrm{i})x + (85-20\mathrm{i}).$$

14. Sei D ein Bereich in $\mathbb{C}$. Das ist eine nichtleere, offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt lokal konstant, falls es für jedes $x \in D$ eine offene Kreisscheibe $B_r(x) = \{z \in \mathbb{C} : |z-x| < r\}$ gibt, auf der f konstant ist. Zeigen Sie:
(a) Es gibt nicht konstante aber lokal konstante Funktionen.
(b) Jede lokal konstante Funktion ist stetig.
(c) Ein Bereich D ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn alle lokal konstanten Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf D konstant sind.

15. Eine komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode $p \in \mathbb{C}^*$, falls $f(z) = f(z+p)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Zahl p heißt eine Periode von f. Die Menge der Perioden von f ist definiert als
$$\mathrm{Per}(f) := \{p \in \mathbb{C} : p \text{ ist einer Periode von } f\} \cup \{0\}.$$
f heißt periodisch, falls $\mathrm{Per}(f) \neq \{0\}$.
(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Per}(f)$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{C}$ ist.
(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Per}(f)$ für $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$$f(x+\mathrm{i}y) = \sin(2x) + \mathrm{i}\cos(y/2), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

16. Zeigen Sie, dass die komplexe Exponentialfunktion exp ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^*$ ist, und bestimmen Sie ihren Kern.

17. Bestimmen Sie Per(exp). Geben Sie möglichst große Gebiete an, in denen die Exponentialfunktion injektiv ist.

18. Zeigen Sie, dass die komplexen Funktionen cos und sin surjektive Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ sind, die jeden Wert in $\mathbb{C}$ abzählbar unendlich oft annehmen.

19. Wann besteht für $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung $\cos z = \cos w$. Bestimmen Sie möglichst große Gebiete, in denen cos injektiv ist.

20. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\cos z$ reell, rein imaginär, 0 oder 1?

21. Beweisen Sie folgende Rechenregeln für die komplexen trigonometrischen Funktionen:
(a) Additionstheoreme für cos und sin,
(b) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
(c) $\cos w - \cos z = -2\sin(w/2 + z/2)\sin(w/2 - z/2)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

22. Bestimmen Sie Per(cos).