2. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 15.10.2012

8. Zeigen Sie, dass alle komplexen Nullstellen des Polynoms z^7-5z^3+12 im Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ liegen.

9. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen,
$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\},$$
zusammen mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und -multiplikation ein Schiefkörper aber kein Körper ist. Hinweis: Ein Schiefkörper erfüllt alle Eigenschaften eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

10. Stellen Sie die Multiplikationstafel von $\pm\mathbf{1}$, $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ und $\pm\mathbf{k}$ auf, wobei
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$
Elemente von $\mathcal{H}$ sind. Bestimmen Sie
$$\left\{X \in \mathcal{H} \mid X^2 = \mathbf{1}\right\}, \qquad \left\{X \in \mathcal{H} \mid X^2 = -\mathbf{1}\right\}.$$

11. Sei $n \in \mathbb{Z}_{n \geq 1}$ und $W(n) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, die Menge der n-ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie:
    (a) $W(n)$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
    (b) $W(n)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n. (D.h., es gibt $\zeta \in W(n)$, so dass $W(n) = \{\zeta^\nu \mid 0 \leq \nu < n\}$. Ein solches ζ heißt primitive n-te Einheitswurzel.)
    (c) Wieviele primitive n-te Einheitswurzeln gibt es.

12. Beweisen oder widerlegen Sie:
    (a) Ist $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle des reellen Polynoms p, dann ist $\bar{\zeta}$ ebenfalls Nullstelle von p.
    (b) Jedes nichtkonstante reelle Polynom, dessen Grad gerade ist, besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
    (c) Jedes reelle Polynom, dessen Grad ungerade ist, besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

    Hinweis: Ein reelles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist ein Ausdruck der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n$, $a_n \neq 0$. Das Element ζ ist genau dann eine Nullstelle von p, wenn $p(\zeta) = 0$.