14. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 28.1.2013

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-c)^n$ habe den Konvergenzradius R. Der Konvergenzkreis von f sei die Menge $\{w \in \mathbb{C} : |w-c| < R\}$. Ein Punkt w am Rand der Konvergenzkreises heißt singulärer Punkt von f, falls es keine Umgebung U von w gibt, so dass f auf U analytisch fortgesetzt werden kann.

76. Bestimmen Sie den Konvergenzradius, die singulären Punkte am Rand des Konvergenzkreises und die maximale analytische Fortsetzung von $f(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n}$.

77. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{(2-\mathrm{i})^{n+1}}$$

analytische Fortsetzungen voneinander sind.

78. (a) Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ komplexe Zahlenfolgen. Zeigen Sie für $k \leq \ell$:

$$\sum_{n=k}^{\ell} a_n b_n = A_\ell b_\ell - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{\ell-1} A_n(b_{n+1} - b_n),$$

wobei $A_r = \sum_{n=0}^{r} a_n$ und die leere Summe gleich Null ist.

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der logarithmischen Reihe $\lambda(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ am Rand des Konvergentkreises und bestimmen Sie alle singulären Punkte.

Hinweis: Es genügt $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ zu untersuchen. (Warum?) Setzen Sie $a_n = z^n$ und $b_n = 1/n$, finden Sie eine Abschätzung für A_n für $|z| = 1$, $z \neq 1$, und zeigen Sie, dass die Partialsummen der Reihe eine Cauchyfolge bilden.

79. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$, beweisen Sie, dass die Reihe in allen Punkten des Randes des Konvergenzkreises endliche Werte annimmt, und dass dies für die Ableitung jedoch nicht gilt.

80. (a) Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sei $W(n) = \{c \in \mathbb{C} \mid c^n = 1\}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln. (Siehe Aufgabe 11.) Zeigen Sie, dass $H := \bigcup_{n\geq 0} W(2^n)$ dicht im Rand des Einheitskreises liegt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \left\{\frac{2\pi m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, und verwenden Sie (ohne Beweis), dass das Bild einer im Definitionsbereich dichten Mengen unter einer stetigen Funktion f dicht im Bild von f liegt.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ und alle singulären Punkte am Rand des Konvergenzkreises.

81. Berechnen Sie die analytischen Fortsetzungen von $\ell(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)$, $z \in B(1,1)$, mit Argument $\arg(z) \in [-\pi/2, \pi/2]$ (siehe Aufgabe 2), längs der Kurven $\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $\gamma_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$ und vergleichen Sie die Funktionselemente, die Sie am Ende der beiden Wege erhalten.