# 13. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 21.1.2013

71. Sei $u \in \mathbb{C}$. In welchen Stellen $z \in \mathbb{C}$ besitzt $f(z) = \mathrm{e}^{uz}/(\mathrm{e}^z - 1)$ Singularitäten. Sei $0 < r < 1$. Legen Sie um jede dieser Stellen eine Kreisscheibe mit Radius $r$ deren Mittelpunkt die Singularität ist. Sei $Z$ die Menge $\mathbb{C}$ ohne die Vereinigung der Abschlüsse all dieser Kreisscheiben. Zeigen Sie, dass für $u \in [0, 1]$ die Funktion $f$ auf $Z$ beschränkt ist. Ist $f$ für $u \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ auf $Z$ unbeschränkt?

72. Die Bernoulli-Polynome sind durch

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

gegeben.
(a) Zeigen Sie, dass $B_n(x)$ ein Polynom vom Grad $n$ ist und drücken Sie $B_n(x)$ in den Bernoulli-Zahlen aus.
(b) Zeigen Sie für $x \in [0, 1]$ und $n \geq 2$ die Formel

$$B_n(x) = -n! \sum_{\nu \geq 1} \frac{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \nu x} + (-1)^n \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \nu x}}{(2\pi \mathrm{i} \nu)^n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die CIF für Kreise mit Radius $(2\nu + 1)\pi$, $\nu \in \mathbb{N}$, um 0 und führen Sie den Grenzübergang $\nu \to \infty$ aus. Wobei brauchen Sie $x \in [0, 1]$?

73. Finden Sie eine ganze Funktion $f$, für die $f(n) = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt.

74. Finden Sie eine ganze Funktion, die einfache Nullstellen genau in den Punkten $z_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ hat. Geben Sie eine Abschätzung für $\max_{|z| \leq R} |f(z)|$ an.

75. Zeigen Sie, dass jede auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion als Quotient von zwei ganzen Funktionen dargestellt werden kann.