

## 12. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 14.1.2013

65. Bestimmen Sie die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von  $p(z) = 3z^4 - 7z + 2$  im Bereich  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3/2\}$ .
66. Beweisen oder widerlegen Sie für eine natürliche Zahl  $n$ : Es gibt ein Polynom  $p$  der Form  $p(z) = z^n + q_{n-1}(z)$ , wobei  $q_{n-1}$  ein Polynom vom Grad  $n-1$  ist, so dass  $|p(z)| < 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$ .
67. Es sei  $G$  ein Gebiet und  $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Funktionen mit  $f' = f \cdot g$ . Zeigen Sie: Hat  $f$  eine Nullstelle, so ist  $f = 0$ .
68. Sei  $f: \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Welche Werte kann  $\int_{\gamma} f(z) dz$  annehmen, wenn  $\gamma$  ein beliebiger stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  ist, der nicht 1 und 2 trifft?

69. Sei  $r$  eine positive reelle Zahl, die nicht in  $\{\pi/2 + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  liegt. Bestimmen Sie

$$\oint_{|z|=r} \tan z dz.$$

70. (a) Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x + e^{i\varphi}} dx$$

für  $a \in (0, 1)$  und  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ .

- (b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{x^n + e^{i\varphi}} dx$$

für ganze Zahlen  $0 < m < n$  und  $-\pi < \varphi < \pi$  mittels geeigneter Substitution aus (a).