11. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 7.1.2013

58. Sei f holomorph in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten. Zeigen Sie: Die Funktion $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ ist holomorph in einer punktierten Umgebung von 0.

59. Transformationsregel (oder Substitutionsregel) für Wegintegrale. Seien $\hat{D}$ und D Bereiche in $\mathbb{C}$, sei $\varphi\colon \hat{D} \to D$ eine holomorphe Abbildung und sei $\hat{\gamma}$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\hat{D}$. Der Weg γ sei gegeben durch $\gamma = \varphi \circ \hat{\gamma}$. Wie kann man für eine auf dem Träger von γ stetige Funktion f das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ als Integral über $\hat{\gamma}$ schreiben? Formulieren und beweisen Sie Ihre Behauptung.

    Hinweis. Wenn $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ ein Weg ist, dann ist der Träger von γ die Menge $\gamma(I)$.

60. Beweisen Sie unter den Voraussetzungen von 58: $\operatorname{res}_0(g) = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{res}_c(f)$. (Hinweis: Verwenden Sie 59 und den Residuensatz.)

61. Berechnen Sie
$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1}\,dz,$$
wobei der Rand des Kreises gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufen wird.

62. Berechnen Sie
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4\cos(t)}\,dt.$$

63. Berechnen Sie mittels komplexer Integrationstheorie die uneigentlichen Integrale:
$$\text{(a)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \qquad \text{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2}\,dx.$$

64. Zeigen Sie:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}, \qquad a > 0.$$