10. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 10.12.2012

53. Seien $p, q \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(p) < \deg(q) =: n$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann q in Linearfaktoren zerlegt werden. Sei also

$$q(x) = \prod_{\nu=1}^{r} (x - \alpha_\nu)^{k_\nu}$$

mit $\alpha_\nu \in \mathbb{C}$, $\alpha_\nu \neq \alpha_\mu$ für $\nu \neq \mu$, und $k_\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ für $1 \leq \mu, \nu \leq r$. Dabei gilt $k_1 + \ldots + k_r = n$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte $A_{\nu,j} \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_\nu} \frac{A_{\nu,j}}{(x - \alpha_\nu)^j}.$$

Hinweis: Induktion über n. Finden Sie eine geeignete Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\{f \in \mathbb{C}[x] \mid \deg(f) < n\}$.

54. Sei $f \neq 0$ holomorph in a und $f(a) = 0$. Geben Sie ein hilfreiches Verfahren zur Bestimmung von $\operatorname{ord}_a(f)$ an.

55. Sei D ein Bereich, $c \in D$ und f holomorph in $D \setminus \{c\}$. Beweisen Sie, dass für $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ folgende Aussagen äquivalent sind:
(a) f hat in c einen Pol der Ordnung m.
(b) Es gibt eine in D holomorphe Funktion g mit $g(c) \neq 0$ so dass

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}, \qquad z \in D \setminus \{c\}.$$

(c) Es gibt eine offene Umgebung U von c in D und eine in U holomorphe Funktion h mit $h(z) \neq 0$, $z \in U \setminus \{c\}$, und $h(c) = 0$, wobei $\operatorname{ord}_c(h) = m$ und

$$f(z) = \frac{1}{h(z)}, \qquad z \in U \setminus \{c\}.$$

56. Sei D ein Bereich und $z_0 \in D$ ein Pol von der in $D \setminus \{z_0\}$ holomorphen Funktion f. Zeigen Sie: Für jede Umgebung $U \subseteq D$ von z_0 gibt es ein $R > 0$, so dass $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq f(U \setminus \{z_0\})$.

57. In welchen Fällen gibt es eine im Nullpunkt holomorphe Funktion mit $f(1/n) = a_n$, $n \geq 1$, wobei
(a) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, \ldots)$.
(b) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, \ldots)$.
(c) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, \ldots)$.