7. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 2.2.2012

Zuerst bearbeiten wir die Aufgaben 54, 59 und 60.

61. Sie $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ und für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gelte $f(1/n) = 1$ und $f(\mathrm{i}/n) = -1$. Welche Art von Singularität besitzt f in 0?

62. Sei D ein Bereich und $A \subset D$ lokal endlich. Sei $f\colon D \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, dass kein $a \in A$ eine wesentliche Singularität von f ist.

    Hinweis: Indirekter Beweis: Sei $a \in A$ eine wesentliche Singularität. Wählen Sie U und V, zwei offene Teilmengen von D, so dass $U \cap V = \emptyset$ und U eine Umgebung von a ist. Leiten Sie einen Widerspruch zur Injektivität her.

63. Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstelle 0 der Funktion $f(z) = z^2(\exp(z^2) - 1)$, $z \in \mathbb{C}$.

64. Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten und deren Typen von
$$f(z) = \frac{\exp(1/(z-1))}{\exp(z) - 1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

65. Die Funktion f sei mit Ausnahme von endlich vielen Singularitäten holomorph auf $\mathbb{C}$. In dem Kreisring $A_{r,s}(0)$, $r < s$, besitze sie eine konvergente Reihenentwicklung $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n < 0$. Beweisen oder widerlegen Sie: f besitzt eine wesentliche Singularität.

66. Seien P und Q holomorphe Funktionen in Umgebung von z_0 mit $P(z_0) \neq 0 = Q(z_0)$ und $Q'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie dass das Residuum von P/Q an der Stelle z_0 gleich $P(z_0)/Q'(z_0)$ ist.

67. Entwickeln Sie
$$f(z) := \frac{z - \sin z}{z^3}$$
    in $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe. Geben Sie den Gültigkeitsbereich der Entwicklung und die Art der Singularität in z_0 an.

68. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}(G)$ der auf dem Gebiet G meromorphen Funktionen einen Körper bildet.

69. Sei $f\colon \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch
$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$
    Welche Werte kann $\int_\gamma f(z)\,dz$ annehmen, wenn γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ ist mit $1, 2 \notin |\gamma|$.

Temporärer Hinweis: Sei γ ein nullhomologer Weg in D, f holomorph in D mit Ausnahme von endlich vielen Punkten c, wobei keines dieser c in $|\gamma|$ liegen darf. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{c \in \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{res}_c(f)\, \mathrm{ind}_\gamma(c),$$

wobei in der Summe tatsächlich nur diejenigen c auftreten, in welchen f nicht holomorph ist.

70. Berechnen Sie mittels komplexer Integrationstheorie die uneigentlichen Integrale:

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

Temporärer Hinweis: Verwenden Sie geeignete Integrationswege der Form $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, wobei γ_1 auf der reellen Achse die Punkte $-R$ und $R > 0$ miteinander verbindet, und γ_2 den Rand eines Halbkreises mit Radius R um 0 in der oberen Halbebene darstellt. Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\, dz$ und zeigen Sie, dass dieser Wert für hinreichend großes R unabhängig von R ist. Untersuchen Sie dann $\lim_{R\to\infty}$ von $\int_{\gamma_2} f(z)\, dz$