5. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 15.12.2011

Wir bearbeiten zuerst die Aufgaben 37, 41 und 43 des 4. Blattes. Da wir ein langes Programm vorhaben, bitte ich Sie, gut vorbereitet zu sein. Nach der 2. Übungsgruppe, also ab ca. 17.30 Uhr, sind Sie alle auf einen Kaffee eingeladen. Kennen Sie ein passendes, vielleicht rauchfreies, Kaffeehaus?

44. (a) Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ komplexe Zahlenfolgen. Zeigen Sie für $k \leq \ell$:

$$\sum_{n=k}^{\ell} a_n b_n = A_\ell b_\ell - A_{k-1} b_k - \sum_{n=k}^{\ell-1} A_n (b_{n+1} - b_n),$$

wobei $A_r = \sum_{n=0}^{r} a_n$ und die leere Summe gleich Null ist.

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der logarithmischen Reihe $\lambda(z)$ für $|z| = 1$. Hinweis: Es genügt $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ zu untersuchen. (Warum?) Setzen Sie $a_n = z^n$ und $b_n = 1/n$, finden Sie eine Abschätzung für A_n für $|z| = 1$, $z \neq 1$, und zeigen Sie, dass die Partialsummen der Reihe eine Cauchyfolge bilden.

45. (a) Berechnen Sie alle Logarithmen von i.

(b) Durch Wahl verschiedener Logarithmen $\ell(z)$ erhält man unterschiedliche Werte für $P_\sigma(z) = \exp(\sigma\ell(z))$. Bestimmen Sie alle diese Werte für
a) $\sigma = z = \mathrm{i}$, b) $\sigma = -\mathrm{i}$, $z = 2$, c) σ eine Quadratwurzel von i und $z = -1$.

46. Seien $a, b \in \mathbb{C}^*$, $a \neq b$. Auf den Gebieten $G_1 := \mathbb{C}^* \setminus [a, b]$ und $G_2 := \mathbb{C}^* \setminus (\{a + t(b - a) \mid t \leq 0\} \cup \{b + t(a - b) \mid t < 0\})$ vergleichen Sie die beiden Zweige von $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$.

Hinweis: Die Abbildung $h(z) := \frac{z-a}{z-b}$ wurde bereits im 3. Übungsblatt untersucht. Zeigen Sie, dass in $h(G_1)$ bzw. $h(G_2)$ Logarithmusfunktionen existieren, wählen Sie dort jeweils eine solche, und bestimmen Sie damit dann die Wurzelfunktionen.

Sei G ein Gebiet, ℓ eine Logarithmusfunktion auf G und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die n Zweige der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{z}$ erhält man durch $\exp(\frac{1}{n}(\ell(z) + 2j\pi\mathrm{i}))$, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

47. Berechnen Sie für die zwei Wege γ_1 und γ_2, die -2 mit $\mathrm{i}+1$ verbinden, wobei γ_1 die Strecke $[-2, \mathrm{i}+1]$ und γ_2 der Streckenzug $[-2, 1] + [1, \mathrm{i}+1]$ ist, die Kurvenintegrale $\int_{\gamma_j} f\, dz$, $j = 1, 2$, der Funktionen

$$\text{a)}\quad f(z) := \bar{z} \qquad \text{b)}\quad f(z) := z^2.$$

48. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma z\, dz$ für $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = te^{2\pi\mathrm{i}t}$, mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes.

49. Beweisen Sie: Es gibt keine ganze Funktion f mit $|f'(0)| > \max\{|f(z)| : |z| = 1\}$.
Hinweis: Cauchysche Integralformel.

50. Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformeln, wobei die Wege einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden:

    a) $\displaystyle\int_{\partial B_1(1)} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz$,

    b) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{3z}}{z-\pi\mathrm{i}}\,dz$, wobei $|\gamma|$ gegeben ist durch $|z-1| = 4$ (bzw. $|z-2|+|z+2| = 6$),

    c) $\displaystyle\int_{\partial B_4(1)} \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$,

    d) $\displaystyle\int_{\partial B_3(0)} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$,

    e) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)(z+3)}\,dz$, wobei $|\gamma|$ der Rand des Rechtecks mit Ecken $2 \pm i$ und $-2 \pm i$ ist.

Formulieren Sie Prüfungsfragen zum Stoff der Vorlesung. Bearbeiten und diskutieren Sie diese auch in kleinen Arbeitsgruppen. Senden Sie die Fragen im Laufe des Semesters an `fripert@uni-graz.at` . Jede(r) Studierende sollte mindestens eine Frage an mich senden. Ihre Fragen werden von mir in einer Fragensammlung herausgegeben und teilweise auch bei der Prüfung Verwendung finden.