4. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 24.11.2011

Wir bearbeiten zuerst die nicht behandelten Aufgaben des 3. Blattes.

37. (a) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine komplexe Zahlenfolge, so dass die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ absolut gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiere. Sei $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \bigcup_{k\geq 0} N_k$ eine disjunkte Zerlegung der Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass für jedes $k \geq 0$ die Reihe $\sum_{\nu\in N_k} a_\nu$ absolut gegen $b_k \in \mathbb{C}$ konvergiert, und dass $\sum_{k\geq 0} b_k$ absolut gegen a konvergiert.

    (b) Formulieren und beweisen Sie einen entsprechenden Satz für die normale Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$, wobei X ein metrischer Raum und f_n für $n \geq 0$ Abbildungen von X nach $\mathbb{C}$ sind.

    Hinweise: Warum ist die Notation $\sum_{\nu\in N_k} a_\nu$ sinnvoll? Untersuchen Sie den Fall, dass $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ die disjunkte Vereinigung $N_1 \cup N_2$ ist. Entweder sind beide Mengen unendlich oder genau eine endlich. Zeigen Sie, dass in beiden Fällen $\sum_{n\geq 0} a_n = b_1 + b_2$ ist. Erklären Sie jeden einzelnen Schritt in Ihrer Ausführung.

38. Sei $b_\sigma(z)$ die Binomische Reihe. Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe für $\sigma \in \mathbb{N}$ und $\sigma \notin \mathbb{N}$, und berechnen Sie die Ableitung von $b_\sigma(z)$.

39. Beweisen Sie unter Verwendung der Holomorphie der Exponentialreihe: Sei G ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Folgende Aussagen sind äquivalent: (1) $f(z) = a\exp(bz)$ für $z \in G$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. (2) $f'(z) = bf(z)$ für $z \in G$ mit $b \in \mathbb{C}$.

40. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$, beweisen Sie, dass die Reihe in allen Punkten des Randes des Konvergenzkreises endliche Werte annimmt, und dass dies für die Ableitung jedoch nicht gilt.

41. (a) Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sei $G_n = \{c \in \mathbb{C} \mid c^n = 1\}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln. Zeigen Sie, dass $H := \bigcup_{n\geq 0} G_{2^n}$ dicht im Rand des Einheitskreises liegt.

    Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \left\{\frac{2\pi m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, und verwenden Sie, dass Bilder von dichten Mengen unter stetigen Funktionen wiederum dicht sind.

    (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n\geq 0} z^{2^n}$ und untersuchen Sie das Verhalten dieser Reihe am Konvergenzkreis.

42. Bestimmen Sie $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid \tan z = 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos z \in \mathbb{R}\}$.

43. Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Drücken Sie $\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$ als Formel in arccos, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ und dem Vorzeichen von $\operatorname{Im} z$ aus. Beweisen Sie weiters, dass die Abbildung $re^{i\varphi} \mapsto \varphi$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{C}^-$ in das reelle Intervalle $(-\pi, \pi)$ ist.

Formulieren Sie Prüfungsfragen zum Stoff der Vorlesung. Bearbeiten und diskutieren Sie diese auch in kleinen Arbeitsgruppen. Senden Sie die Fragen im Laufe des Semesters an `fripert@uni-graz.at` . Jede(r) Studierende sollte mindestens eine Frage an mich senden. Ihre Fragen werden von mir in einer Fragensammlung herausgegeben und teilweise auch bei der Prüfung Verwendung finden.