3. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 10.11.2011

26. Seien f und g zweimal komplex differenzierbare Funktionen auf dem Bereich D. Zeigen Sie:
$$\frac{\partial^2(f \cdot \bar{g})}{\partial z \partial \bar{z}} = f' \cdot \overline{g'}.$$

27. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$. Falls $(c, d) \neq (0, 0)$, dann definiert A eine rationale Funktion
$$h_A(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$
die für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $cz + d \neq 0$ definiert ist. Bestimmen Sie für $(c, d) \neq (0, 0)$ den maximalen Definitionsbereich D von h_A und beweisen Sie, dass h_A in D komplex differenzierbar ist mit
$$h_A'(z) = \frac{\det A}{(cz + d)^2},$$
und dass aus $\det A = 0$ folgt, dass h_A konstant ist.

28. Sei $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Gruppe der regulären (invertierbaren) 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie für $A,\ B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt $h_{AB} = h_A \circ h_B$ und beweisen Sie, dass $h_A = \mathrm{id}$ genau dann erfüllt ist, wenn A ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix ist, d.h. wenn $a = d \neq 0$ und $b = c = 0$.

29. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Zeigen Sie: Falls $c = 0$, dann ist $h_A \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und h_A ist eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Falls $c \neq 0$, dann ist $h_A \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{(-d)/c\})$ und h_A ist eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \{(-d)/c)\}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. Für die Umkehrabbildung gilt $h_A^{-1} = h_{A^{-1}}$.

30. Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Zeigen Sie für $c \in \mathbb{H}$:
$$\{z \in \mathbb{C} : |z - c| = |z - \bar{c}|\} = \mathbb{R},$$
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z - c}{z - \bar{c}} \right| < 1 \right\} = \mathbb{H}.$$
Für $C = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & -\bar{c} \end{pmatrix}$ ist $h_C \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{\bar{c}\})$, und folgern Sie daraus, dass die Einschränkung von h_C auf $\mathbb{H}$ eine biholomorphe Abbildung zwischen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E} = B_1(0)$ ist. Zeigen Sie weiters, dass $h_C^{-1} = h_{C'}$ mit $C' = \begin{pmatrix} -\bar{c} & c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

31. Sei $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$. Zeigen Sie, dass $q\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}^-$, $z \mapsto -z^2$, eine holomorphe und bijektive Abbildung ist. Unter Verwendung der obigen Aufgabe geben Sie eine Abbildung an, die $\mathbb{E}$ bijektiv und holomorph auf $\mathbb{C}^-$ abbildet.

32. Sei $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ die Gruppe der reellen 2×2-Matrizen mit positiver Determinante. Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ einen Automorphismus h_A von $\mathbb{H}$ bestimmt.

33. Seien D und D' Bereiche in $\mathbb{C}$, und f sei eine biholomorphe Abbildung von D nach D'. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Aut}D \to \mathrm{Aut}D'$, $h \mapsto f \circ h \circ f^{-1}$, ein Gruppenisomorphismus ist. Konstruieren Sie mit diesem Verfahren Automorphismen von $\mathbb{E}$.

34. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ definiert (also für $|z| \neq 1$) durch

$$f_n(z) := \frac{1}{1+z^n}.$$

   Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) in $B_r(0)$ mit $0 < r < 1$ und in $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ mit $R > 1$ gleichmäßig konvergiert.

   Konvergiert diese Folge auch in $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$ gleichmäßig?

35. Es sei für $n \in \mathbb{N}$ durch $p_n(z) = a_{n,0} + a_{n,1}z + \ldots + a_{n,d}z^d$ eine Folge von Polynomen gegeben, deren Grad stets $\leq d$, $d \in \mathbb{N}$, ist. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (a) Die Folge (p_n) konvergiert kompakt in $\mathbb{C}$.
   (b) Es gibt $d+1$ paarweise verschiedene Punkte $c_0, \ldots, c_d$ in $\mathbb{C}$, so dass die Folge (p_n) in $\{c_0, \ldots, c_d\}$ punktweise konvergiert.
   (c) Für $0 \leq j \leq d$ konvergiert die Folge der Koeffizienten $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$.

   Falls eine dieser Aussagen gilt, dann konvergiert (p_n) gegen das Polynom $a_0 + a_1 z + \ldots + a_d z^d$ mit $a_j = \lim_{n\to\infty} a_{n,j}$, $0 \leq j \leq d$. Hinweis: (b) $\Rightarrow$ (c): Verwenden Sie Lagrange Interpolation und zeigen Sie, dass $(p_n(c))$ punktweise auf $\mathbb{C}$ konvergiert. Auswertung an geeigneten Stellen liefert das Ergebnis.

36. Sei (p_n) eine Folge von komplexen Polynomen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) Die Folge (p_n) konvergiert gleichmäßig in $\mathbb{C}$.
   (b) Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und eine konvergente Folge $(c_n)_{n>N}$ komplexer Zahlen, so dass $p_n = p_N + c_n$ ist für $n > N$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes nichtkonstante Polynom auf $\mathbb{C}$ nicht beschränkt ist.

Formulieren Sie Prüfungsfragen zum Stoff der Vorlesung. Bearbeiten und diskutieren Sie diese auch in kleinen Arbeitsgruppen. Senden Sie die Fragen im Laufe des Semesters an `fripert@uni-graz.at` . Jede(r) Studierende sollte mindestens eine Frage an mich senden. Ihre Fragen werden von mir in einer Fragensammlung herausgegeben und teilweise auch bei der Prüfung Verwendung finden.