1. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 13.10.2011

1. Zeigen Sie, dass alle komplexen Nullstellen des Polynoms $z^7 - 5z^3 + 12$ im Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ liegen.

2. Berechnen Sie $(\mathrm{i}+1)/(\mathrm{i}-1)$. Beschreiben Sie verschiedene Lösungsmethoden.

3. Bestimmen Sie die komplexen Nullstellen des quadratischen Polynoms

$$z^2 - (3-\mathrm{i})z + (2-6\mathrm{i}).$$

   Beschreiben Sie verschiedene Lösungsmethoden.

4. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{H}$ der Hamiltonschen Quaternionen,

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \;\middle|\; z, w \in \mathbb{C} \right\},$$

   zusammen mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und -multiplikation ein Schiefkörper aber kein Körper ist. Hinweis: Ein Schiefkörper erfüllt alle Eigenschaften eines Körpers mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

5. Stellen Sie die Multiplikationstafel von $\pm\mathbf{1}$, $\pm\mathbf{i}$, $\pm\mathbf{j}$ und $\pm\mathbf{k}$ auf, wobei

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

   Elemente von $\mathcal{H}$ sind. Bestimmen Sie

$$\left\{X \in \mathcal{H} \mid X^2 = \mathbf{1}\right\}, \qquad \left\{X \in \mathcal{H} \mid X^2 = -\mathbf{1}\right\}.$$

6. Zeigen Sie, dass

$$\hat{d}(x,y) := \max\{|\operatorname{Re} x - \operatorname{Re} y|, \, |\operatorname{Im} x - \operatorname{Im} y|\}$$

   und

$$\tilde{d}(x,y) := |\operatorname{Re}(x-y)| + |\operatorname{Im}(x-y)|,$$

   für x, $y \in \mathbb{C}$, Metriken auf $\mathbb{C}$ sind. Zeichnen Sie die Einheitskreise bezüglich dieser Metriken und bezüglich der Euklidischen Metrik d in der komplexen Zahlenebene, und beweisen Sie, dass $U \subseteq \mathbb{C}$ genau dann offen in $(\mathbb{C}, d)$ ist, wenn U offen in $(\mathbb{C}, \hat{d})$ ist, bzw. genau dann, wenn U offen in $(\mathbb{C}, \tilde{d})$ ist. (Metriken, die die gleiche Topologie bestimmen, heißen äquivalent.)

7. Sei $M \neq \emptyset$ versehen mit der diskreten Metrik d. Zeigen Sie, dass in (M, d) jede Teilmenge von M offen und abgeschlossen in M ist.

8. Sei (M, d) ein metrischer Raum, und $X \subseteq M$ sei total beschränkt. Zeigen Sie, dass X beschränkt ist.

9. Sei $X \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass X genau dann total beschränkt ist, wenn X beschränkt ist. Hinweis: Falls X beschränkt ist, existiert ein $R > 0$ so dass $X \subset Q := \{x + \mathrm{i}y \mid -R \leq x, y \leq R\}$. Teilen Sie Q in endlich viele „kleine" Teilquadrate, mit deren Hilfe man ein ε-Netz finden kann.

10. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $\emptyset \neq X \subseteq M$. Zeigen Sie, dass X mit der induzierten Metrik genau dann vollständig ist, wenn X abgeschlossen in M ist.

11. Sei (M, d) ein metrischer Raum und X eine in M dichte Teilmenge. Beweisen oder widerlegen Sie:

    (a) Für jede in M offene Menge $U \subseteq M$ ist $X \cap U$ dicht in U.

    (b) Für jede in M abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ ist $X \cap A$ dicht in A.

12. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(z_n)_{n \geq 0}$ eine konvergente Folge in M mit $\lim z_n = a \in M$. Zeigen Sie, dass $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kompakt ist.

13. Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ genau dann stetig ist, wenn für jede kompakte Teilmenge K von M_1 die Einschränkung $f|_K$ von f auf K stetig ist.

14. Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ genau dann stetig ist, wenn für jede Teilmenge X von M_1 gilt $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

15. Sei d die Euklidische Metrik auf $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie eine Metrik D auf $\mathbb{C}$, so dass die Identität als Abbildung von $(\mathbb{C}, d)$ nach $(\mathbb{C}, D)$ nicht stetig ist.

Formulieren Sie Prüfungsfragen zum Stoff der Vorlesung. Bearbeiten und diskutieren Sie diese auch in kleinen Arbeitsgruppen. Senden Sie die Fragen im Laufe des Semesters an `fripert@uni-graz.at` . Jede(r) Studierende sollte mindestens eine Frage an mich senden. Ihre Fragen werden von mir in einer Fragensammlung herausgegeben und teilweise auch bei der Prüfung Verwendung finden.