Prüfungsfragen zur Einführung in die komplexe Analysis

1. Welche Eigenschaften muss eine holomorphe Funktion besitzen, um ein Automorphismus zu sein? Außerdem: Welche Gemeinsamkeiten haben der oben erwähnte Automorphismus und ein Gruppenautomorphismus? (Markus Felberbauer)

2. Wie hängen der Konvergenzradius einer Potenzreihe, der Konvergenzradius ihrer Ableitung und der Konvergenradius ihres Integrales zusammen? (Sandra Peterl)

3. Ist der Hauptzweig des Logarithmus $\log(z)$ an der Stelle -1 stetig? (Alexandra Weinberger)

4. Der Plot stellt die Werte des Polynoms

$$p(z) = z^9 - 2z^8 + 3z^7 - z^5 + 5z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 1$$

auf dem Einheitskreis dar. Lesen Sie daraus ab, wieviele Nullstellen des Polynoms innerhalb des Einheitskreises liegen.

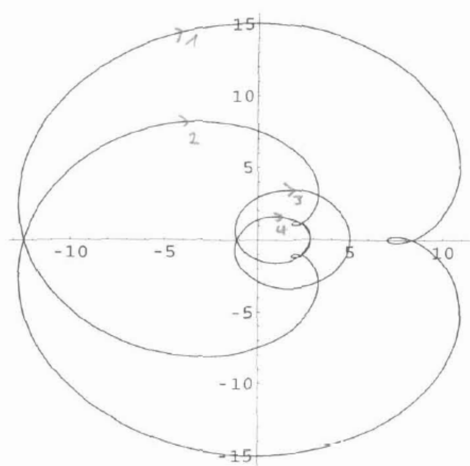

Abbildung 1: Plot von $p(e^{it})$

Sämtliche Zwischenschritte sind anzugeben.

(Manfred Scheucher)

5. 1) Sei M eine sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist M wegzusammenhängend bzw. ein Gebiet?
2) hinreichenendes und notwendiges Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit (+Beweis) (Sara Basara)

6. Wie hängt der Funktionswert einer ganzen Funktion im Mittelpunkt z eines Kreises mit dem Mittelwert der Funktionswerte am Rand zusammen? (Stefan Kremsner)

7. 1) Definieren Sie die Begriffe: punktweise, gleichmäßige, lokal-gleichmäßige bzw. kompakte Konvergenz einer Funktionenfolge.
   2) Welche Beziehungen zwischen gleichmäßiger, lokal-gleichmäßiger bzw. kompakter Konvergenz bestehen in einem metrischen Raum? (Lena Ragger)

8. Wann ist auf einem Gebiet eine holomorphe Funktion orientierungstreu, wann eine orientierungstreue Funktion holomorph? (Thomas Kuenzer)

9. Man zeichne (passende) Implikationspfeile bzw Äquivalenzpfeile zwischen folgenden Konvergenzbegriffen für Folgen: Punktweise Konvergenz, Gleichmäßige Konvergenz, Lokal gleichmäßige Konvergenz, Kompakte Konvergenz, Stetige Konvergenz, Stetigkeit, Cauchy-Folge (Markus Hartmair)

10. 1) Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^k x^k$$

    und berechne gegebenenfalls die Summe.
    2) Man skizziere die Partialsummen der Reihe in der komplexen Zahlenebene fürr kleine k mit $x = 1/2$, $x = 1$ und $x = 2$ und begründe das Konvergenzverhalten und die (Un-)Beschränktheit der Partialsummen. (Florian Nachbagauer)

11. Sei (p_n) eine auf $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergente Folge von Polynomen. Zeigen Sie, dass die Folge (p_n) gegen ein Polynom konvergiert. (Stefan Lendl)

12. Ist eine beschränkte ganze Funktion konstant? Beweis oder Gegenbeispiel. Wann ist eine Funktion ganz? (Julia Resch)

13. 1) Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine Abbildung mit Perioden $x_1 + \mathrm{i}y_1, x_2 + \mathrm{i}y_2$, wobei (x_1, y_1) und (x_2, y_2) linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ sind. Zeigen Sie: f ist konstant.
    2) Welche Arten von isolierten singulären Punkten haben wir definiert? Unter welchen Bedingungen sprechen wir von einer Polstelle? Gibt es nichtrationale holomorphe Funktionen, die eine Polstelle besitzen? (Michael Kalab)

14. Sei M eine Menge disjunkter Gebiete in $\mathbb{C}$. Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Sei $W := \{f\colon [c, d] \to \mathbb{C} \mid f(c) = a \wedge f(d) = b \wedge f(x) \notin G,\ \forall x \in [c, d],\ \forall G \in M\}$. Gib die maximale Anzahl der Wege in W mit kürzester Bogenlänge in Abhängigkeit von $|M|$ an. (Patrick Hammer)

15. 1) Sind holomorphe bzw. antiholomorphe Funktionen a) winkeltreu, b) orientierungstreu? Was lässt sich bezüglich der ersten Ableitung aus der Holomorphie bzw. Antiholomorphie folgern? Veranschaulichen Sie bitte die Begriffe der Winkel- und Orientierungstreue geometrisch!
    2) Definieren Sie die Singularitätsbegriffe, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben! Was lässt sich aus der Art der Singularität in Bezug auf den Hauptteil ableiten? (Aleksandar Karakas)

16. Man bestimme alle ganzen Funktionen, für die gilt $f(x+\mathrm{i}y) = f(x+nx+\mathrm{i}y)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ und $\forall x, y \in \mathbb{C}$. (Daniel Perz)

17. Welche Arten von Singularitäten kann eine rationale Funktion aufweisen? (Alexander Petschacher)

18. Zeigen Sie, dass sich die Funktion $f(z) = \frac{\sinh(\frac{z}{2})}{e^z - 1}$ eindeutig zu einer ganzen Funktion fortsetzen lässt. (Paul Tabatabai)

19. Es sei $(z_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeige, dass $(z_n)_n$ genau dann konvergiert, wenn die reellen Folgen $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ beide konvergieren. Zeige weiteres, dass in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

(Dragan Runjaic)

20. Definieren sie mithilfe der komplexen Exponentialfunktion die Zahl π. (Matthäus Jäger)

21. Definition Exponentialfunktion; Was ist das Bild, der Kern und die Periode der Exponentialfunktion? (Definition + Beweis) (Florian Himmelbauer)

22. Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die isolierten Singularitäten und deren Typen (bei Polen auch die Ordnung) von:

    - $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
    - $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$
    - $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$

    (Doris Halwachs)

23. Entwickle in eine Potenzreihe um 0 und bestimme den Konvergenzradius:

$$z \to \frac{z+4}{z^2 - z - 2}$$

(Sebastian Wimmer)

24. 1) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{z \cdot \exp(\frac{12}{1-z}) \cdot \mathrm{i}}{z-1} dz,$$

wobei γ den Rand von $B_2(0)$ 3-mal im Uhrzeigersinn durchläuft.
2) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls f in einer Umgebung von z_0 holomorph ist und in z_0 eine nicht hebbare Singularität besitzt, dann besitzt $\exp(f(z))$ in z_0 eine wesentliche Singularität. (Joachim Orthaber)

25. Überprüfen Sie, ob die Funktion eine hebare Singularität bei 0 besitzt:

$$z \mapsto z^2 \sin(\frac{1}{z})$$

(Michael Enser)

26. Zeigen Sie: Sind f und g zwei ganze Funktionen mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann gilt $f(z) = cg(z)$ mit einem $c \in \mathbb{C}$. (Peter Schlosser)

27. 1) Gib die Definition an: Sei T ein $\mathbb{R}$-linearer Operator. Dann heißt T winkeltreu genau dann wenn gilt:
2) Welche Eigenschaften hat T?
3) Welchen Zusammenhang haben Holomorphie und Winkeltreue? (Marvin Bigga)

28. 1) Zeigen sie, dass sich $z \mapsto ((\sinh(z/2)/(\mathrm{e}^z - 1))$ eindeutig zu einer ganze Funktion erweitern lässt.
2.) Beweisen Sie, dass sich die Art einer Singularität eindeutig über die Koeffizienten des Hauptteils der Laurentreihe um diesen Punkt bestimmen lässt. (Kevin Moazedi)