67.)

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3} \quad \text{in } z = 0 \text{ entwickeln}$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{z^{2n+1-3}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \underbrace{(-1)^{n+1}}_{(-1)^{n-1}} \frac{z^{2(n-1)}}{(2n+1)!} = \left| k = n-1 \right| \quad 2n+1 = 2(k+1)+1$$

$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+3)!}$$

$\Rightarrow$ 0 ist eine hebbare Singularität

diese Entwicklung gilt auf ganz $\mathbb{C}$.

68) zz. $(\mathcal{M}(G), +, \cdot)$ ist ein Körper, wobei G ein Gebiet ist.

- die Summe von 2 meromorphen Funktionen ist wieder meromorph:

$P(f_1 + f_2) \subseteq P(f_1) \cup P(f_2)$ ist wieder lokal endlich.

denn für $z \notin P(f_1) \cup P(f_2)$ ist $(f_1 + f_2)(z) = f_1(z) + f_2(z) \in \mathbb{C}$.

Falls $c \in P(f_1) \cup P(f_2)$, dann existiert

$m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ so dass $(z-c)^{m_1} f_1(z)$ und

$(z-c)^{m_2} f_2(z)$ beschränkt sind in einer

Umgebung von c, also ist für

$m_3 = \max\{m_1, m_2\}$ auch

$(z-c)^{m_3} (f_1(z) + f_2(z))$ beschränkt in einer

Umgebung von c.

Assoziativität ✓

neutrales Element ist die 0-Abbildung (ist holomorph)

inverses Element zu $f \in \mathcal{M}(G)$ ist $-f$ das ebenfalls

in $\mathcal{M}(G)$ liegt. $P(-f) = P(f)$.

Kommutativität ✓

Produkt zweier meromorpher Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(G)$

ist wieder meromorph.

Für $z \notin P(f_1) \cup P(f_2)$ ist $(f_1 \cdot f_2)(z) = f_1(z) f_2(z) \in \mathbb{C}$.

Falls $c \in P(f_1) \cup P(f_2)$ dann ist

$(z-c)^{m_1} f_1(z) \cdot (z-c)^{m_2} f_2(z) =$

$(z-c)^{m_1+m_2} (f_1(z) \cdot f_2(z))$ beschränkt in einer

Umgebung von c. $\Rightarrow P(f_1 \cdot f_2) \subseteq P(f_1) \cup P(f_2)$

Assoziativität ✓

neutrales Element ist die 1-Abbildung

(diese ist holomorph)

Sei $f \in \mathcal{M}(G)$, $f \neq 0$,

~~dann besitzt f höchstens abzählbar unendlich viele Nullstellen.~~

dann ist die Nullstellenmenge von f lokal endlich.

$\cancel{f|_{G \setminus P(f) \setminus N(f)}}$

$f|_{G \setminus (P(f) \cup N(f))}$ ist nullstellenfrei

also existiert $\hat{f} \in \mathcal{O}(G \setminus (P(f) \cup N(f)))$ mit

$$(f \cdot \hat{f})(z) = 1 \quad \text{für } z \in G \setminus (P(f) \cup N(f)). \qquad (*)$$

Sei $c \in N(f)$ der Ordnung m, dann ist $f(z) = (z-c)^m f^*(z)$ mit $f^*(c) \neq 0$.

$(*) \Rightarrow \hat{f}(z) = \frac{1}{f(z)}$ für $z \in G \setminus (P(f) \cup N(f))$

also ist $\hat{f}(z) = \frac{1}{f(z)}$ in einer Umgebung $U \setminus \{c\}$ von c.

d.h. c ist eine Polstelle m-ter Ordnung von $\hat{f}$

$\Rightarrow N(f) = P(\hat{f})$ ist lokal endlich.

Sei $c \in P(f)$ der Ordnung m, dann ist

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m} \quad \text{mit } g(c) \neq 0.$$

also ist $\hat{f}(z) = \frac{(z-c)^m}{g(z)}$ in einer Umgebung U von c, s.d. $g(z) \neq 0$ $\forall z \in U$.

also ist c eine Nullstelle von $\hat{f}$ der Ordnung m.

$\Rightarrow P(f) = N(\hat{f})$.

Also ist $\hat{f} \in \mathcal{M}(G)$ mit $f \cdot \hat{f} = 1$

(die Einheiten in der Algebra $\mathcal{M}(D)$ sind alle jene f, deren Nullstellenmenge lokal endlich ist.).

Assoziativität. ✓

Distributivgesetz ✓

69) f besitzt 2 Polstellen der Ordnung 1 nämlich 1 und 2.

$\mathbb{C}$ ist ein Sterngebiet

jeder geschlossene Weg in $\mathbb{C}$ ist nullhomolog.

Falls $1,2 \notin |\gamma|$ kann der Residuensatz angewandt werden.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz = \operatorname{res}_1(f)\operatorname{ind}_\gamma(1) + \operatorname{res}_2(f)\operatorname{ind}_\gamma(2).$$

$$\operatorname{res}_1(f) = \lim_{z \to 1} (z-1)\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\operatorname{res}_2(f) = \lim_{z \to 2} (z-2)\frac{z}{(z-1)(z-2)} = 2$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\Big(-\operatorname{ind}_\gamma(1) + 2\operatorname{ind}_\gamma(2)\Big)$$

$\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ für $z \notin |\gamma| \Rightarrow$

Werte des Integrals sind $2\pi i\,\mathbb{Z}$,

da $\{-n + 2m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

10) a) siehe Tafel

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\,dx$

setze $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2-2z+2}$, dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz.$$

•) $z^2 \cdot f(z)$ ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt, denn

$\exists\, R>0$ so dass $|z^2-2z+2| \geq \frac{1}{2}|z|^2$ für $|z| > R$.

also gilt: $|z^2 \cdot f(z)| = \dfrac{|z|^2}{|z^2-2z+2|} \leq \dfrac{|z|^2}{\frac{1}{2}|z|^2} = 2$

für $|z| > R$.

Für $|z| \leq R$ ist $z^2 \cdot f(z)$ beschränkt, da der Nenner von f keine reellen Nullstellen besitzt.

also existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz$ und auch das gesuchte Integral

•) ZZ: $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = 0$ für $z \in \overline{\mathbb{H}}$.

Sei $z \in \overline{\mathbb{H}} \Rightarrow z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$.

$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

$e^{-y} \leq 1$, da $y \geq 0$.

$\exists\, R > 0$ so dass $|z^2 - 2z + 2| \geq \frac{1}{2}|z|^2$ für $|z| \geq R$.

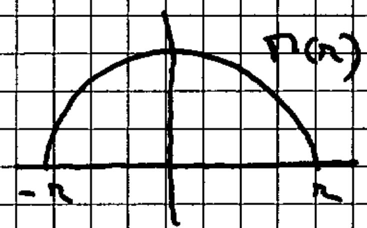
$$|z \cdot f(z)| = \frac{|z| \cdot e^{-y}\, |\cos x + i \sin x|}{|z^2 - 2z + 2|} \leq \frac{|z|}{\frac{1}{2}|z|^2}$$

$$= \frac{2}{|z|} \xrightarrow[z \to \infty]{} 0 .$$

Also gilt $\lim\limits_{z \to \infty} z f(z) = 0$ für $z \in H$.

•) Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx =$$



$$\int_{[-r,r]+\Gamma(r)} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}_{1+i} f \quad , \text{denn}$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \iff z = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

Also ist $1+i$ die einzige Singularität von f in H.

$1+i$ ist ein einfacher Pol von f, also ist

$$\operatorname{res}_{1+i} f = \lim_{z \to 1+i} (z - (1+i))\, f(z) =$$

$$= \lim_{z \to 1+i} \frac{e^{iz}}{z - (1-i)} = \frac{e^{i-1}}{2i} = \frac{1}{e} \frac{e^{i}}{2i} = \frac{\cos 1 + i \sin 1}{e \cdot 2i}$$

Also $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi \cdot \sin 1}{e}$

! Die Berechnung mit $\frac{\sin z}{z^2 - 2z + 2}$ geht nicht, da nicht gilt

$$\lim_{z \to \infty} z \cdot \frac{\sin z}{z^2 - 2z + 2} = 0 \;!!$$