Beh.: es gibt kein solches f.

59) Annahme: Sei $f : \overline{\mathbb{E}} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, ~~die~~ die stetig auf $\overline{\mathbb{E}}$ und holomorph auf $\mathbb{E}$ ist mit $f(z) = z^{-n}$ für $z \in \partial\mathbb{E}$ (wobei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$).

Setze $g(z) = z^{n-1} \cdot f(z) \quad z \in \overline{\mathbb{E}}$

$\Rightarrow \quad g(z) = \frac{1}{z} \quad$ für $z \in \partial\mathbb{E}$

g ist stetig auf dem Kompaktum $\overline{\mathbb{E}}$, also gleichmäßig stetig auf $\overline{\mathbb{E}}$,

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon,1} > 0$ so dass $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$

falls $x, y \in \overline{\mathbb{E}}$ mit $|x-y| < \delta_{\varepsilon,1}$

die Funktion $h(z) := \frac{1}{z}$ ist gleichmäßig stetig auf $\overline{A_{\frac{1}{2},1}(0)}$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_{\varepsilon,2} > 0$ so dass $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$

falls $x, y \in \overline{A_{\frac{1}{2},1}(0)}$ mit $|x-y| < \delta_{\varepsilon,2}$

Sei $\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon := \min\{\delta_{\varepsilon,1}, \delta_{\varepsilon,2}, \frac{1}{3}\}$

Sei $x \in A_{1-\delta_\varepsilon,1}(0)$ gewählt,

dann existiert ein $y \in \partial\mathbb{E}$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$

$$|g(x) - \tfrac{1}{x}| \le |g(x) - g(y)| + \underbrace{|g(y) - \tfrac{1}{x}|}_{h(y)-h(x)} < 2\varepsilon$$

Wähle nun r so dass $1 - \delta_\varepsilon < r < 1$

dann liegt $B_r(0) \subseteq \overline{\mathbb{E}}$.

Da g ~~stetig ist~~ holomorph in $\mathbb{E}$ ist, $\mathbb{E}$ ein Sterngebiet, $\partial B_r(0)$ ein geschlossener Weg ist $\int_{\partial B_1(0)} g(z)\,dz = 0$.

$$\int_{\partial B_r(0)} h(z)\,dz = \int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Sei $\varepsilon < \frac{1}{2}$ gewählt:

$$2\pi = \left| \int_{\partial B_r(0)} g(z)\,dz - \int_{\partial B_r(0)} h(z)\,dz \right| \leq$$

$$\int_{\partial B_r(0)} |g(z) - h(z)|\,dz \leq 2\pi r\, |g-h|_{\partial B_r(0)}$$

$$< 2\pi r \cdot 2\varepsilon < 4\pi\varepsilon < 2\pi.$$ Widerspruch.

Also gibt es kein solches f.

(Lösungsidee von Thomas Kunzer.)

Die Schwierigkeit bei diesem Beispiel liegt darin, dass $B_1(0) = \partial\mathbb{E}$ nicht im Definitionsbereich der holomorphen Funktion liegt. Dieser ist natürlich $\mathbb{E}$, und daher berandet der Weg $B_1(0)$ diesen Bereich!

60) a) Sei $c \notin |\gamma|$.

und $\operatorname{ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - c}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - c} \gamma'(t)\, dt$

wobei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\quad t \mapsto \gamma(t)$.

Dann ist $\gamma - c : [a,b] \to \mathbb{C}$
$\quad t \mapsto \gamma(t) - c$ ebenfalls ein Weg.

Falls $c \notin |\gamma| \Rightarrow 0 \notin |\gamma - c|$.

$$(\gamma - c)'(t) = \gamma'(t) \qquad t \in [a,b]$$

Also ist

$$\operatorname{ind}_{\gamma - c}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - c} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - c} \gamma'(t)\, dt$$

$$= \operatorname{ind}_\gamma(c).$$

b) zz: L_j ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ in $B_{r_j}(p_j)$

$L_j \in \mathcal{O}(B_{r_j}(p_j))$ ✓

für $z \in B_{r_j}(p_j)$ gilt: $\exp(L_j(z)) = z$.

Differenzieren liefert: $L_j'(z) \exp(L_j(z)) = 1$

also $\quad L_j'(z) \cdot z = 1 \quad$ für $z \in B_{r_j}(p_j)$

da z stets $\neq 0 \Rightarrow L_j'(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in B_{r_j}(p_j)$.

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \to B_{r_j}(p_j) && 1 \le j \le m \\ &\gamma_j(t_j) = \gamma_{j+1}(t_j) && 1 \le j < m \\ &\gamma_1(t_0) = \gamma_m(t_m) \end{aligned}\right\} (*)$$

und $\operatorname{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta =$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} L_j'(\zeta)\, d\zeta =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \Big(L_j(\gamma_j(t_j)) - L_j(\gamma_j(t_{j-1})) \Big) =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \Big(\ln|\gamma_j(t_j)| + i \arg_j(\gamma_j(t_j)) - \ln|\gamma_j(t_{j-1})| - i \arg_j(\gamma_j(t_{j-1})) \Big) =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \Big(\ln|\gamma_j(t_j)| - \ln|\gamma_j(t_{j-1})| \Big) + \frac{i}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \Big(\arg_j(\gamma_j(t_j)) - \arg_j(\gamma_j(t_{j-1})) \Big)$$

Aufgrund von (*) verschwindet hier die erste Summe und wir erhalten

$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{m} \Big(\arg_j(\gamma_j(t_j)) - \arg_j(\gamma_j(t_{j-1})) \Big) \quad (0)$$

$\arg_j(\gamma_j(t_j)) - \arg_j(\gamma_j(t_{j-1}))$ ist die Argument-differenz ~~zwischen zwischen Anfangs und E~~ zwischen Endpunkt und Anfangspunkt des Weges γ_j,

Die Summe in (o) liefert also die Argument-
differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt
des Weges $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.
Diese Differenz dividiert durch 2π ergibt die
Anzahl der Umläufe (gegen den Uhrzeigersinn)
der Kurve γ um den Nullpunkt!
Damit haben wir nun nachgerechnet, dass
$\mathrm{ind}_\gamma(c)$ nach dem in der Vorlesung kurz
angegebenen Rezept bestimmt werden kann.