4b) $\det\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} = -b + a \neq 0$

$\Rightarrow h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{b\})$

h ist bijektiv von $\mathbb{C}\setminus\{b\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{1\}$

$h(z) = 0 \Leftrightarrow z = a.$

Bereiche $h(G_1) = (\mathbb{C}\setminus\{1\}) \setminus (-\infty, 0] = \mathbb{C}^- \setminus \{1\}$

dort ist z.B. der Hauptzweig des Logarithmus eine Logarithmusfunktion.

$h(G_2) = \big((\mathbb{C}\setminus\{1\}) \setminus [0,1)\big) \setminus (1, \infty) = -\mathbb{C}^-$

auf $h(G_2)$ ist $\widetilde{\log}(z) := \log|z| + i\,\widetilde{\arg}(z)$

mit $\widetilde{\arg}(z) \in (0, 2\pi)$ eine Logarithmusfunktion.

auf G_1 haben wir die folgenden Zweige der Wurzelfunktion:

$\exp\left(\frac{1}{2}(\log h(z) + 2j\pi i)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log h(z) + j\pi i\right)$

für $j \in \{0,1\}$

auf G_2:

$\exp\left(\frac{1}{2}\widetilde{\log}(h(z)) + j\pi i\right) \quad j \in \{0,1\}.$

Ist $h(z) \in \mathbb{H}$, dann gilt

$\exp\left(\frac{1}{2}\log h(z) + j\pi i\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\widetilde{\log}\, h(z) + j\pi i\right) \quad j \in \{0,1\}$

Ist $h(z) \in -\mathbb{H}$, dann ist

$\widetilde{\log}\, h(z) = \log h(z) + 2\pi i$, also

$\exp\left(\frac{1}{2}\log h(z) + j\pi i\right) = -\exp\left(\frac{1}{2}\log \tilde{h}(z) + j\pi i\right) \quad j \in \{0,1\}.$

47) a) $\gamma_1(t) = -2 + ti + 3t \quad t \in [0,1]$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\, dz = -1 - 2i$$

$\gamma_2 = \sigma + \nu \qquad \sigma(t) = -2 + 3t \quad t \in [0,1]$

$\nu(t) = 1 + ti \quad t \in [0,1]$

$\sigma(1) = \nu(0)$ ✓

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}\, dz = \int_{\sigma} \bar{z}\, dz + \int_{\nu} \bar{z}\, dz = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + i$$

$$= -1 + i$$

b) $$\int_{\gamma_1} z^2\, dz = 2 + \frac{2i}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} z^2\, dz = 2 + \frac{2i}{3}$$

Weil $z \mapsto z^2$ ist holomorph: in einem gegebenen Kreisscheibe ist das Integral wegunabhängig.
(oder in $\mathbb{C}$)

48) $\gamma(t) = t \cdot e^{2\pi i t} \qquad t \in [0,1]$

definiere ein Weg: $\alpha: [0,1] \to \mathbb{C} \quad t \mapsto 1 - t$

$\gamma + \alpha$ ist ein geschlossener Weg

$\gamma(1) = \alpha(0)$ und $\alpha(1) = \gamma(0)$ ✓

$z \mapsto z$ ist holomorph in $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \int_{\gamma+\alpha} z\, dz = 0 = \int_{\gamma} z\, dz + \int_{\alpha} z\, dz$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} z\, dz = -\int_{\alpha} z\, dz = \frac{1}{2}$$

48) $\gamma(t) = t\, e^{2\pi i t}$

$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \quad t \mapsto 1-t$

~~$\gamma + \alpha$~~ ist ein geschlossener Weg

$\gamma(1) = e^{2\pi i} = 1 = \alpha(0)$

$\alpha(1) = 0 = \gamma(0)$

$z \mapsto z$ ist holomorph in $\mathbb{C}$

$$\int_{\gamma+\alpha} z\, dz = 0 = \int_\gamma + \int_\alpha$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = -\int_\alpha z\, dz =$$

$$-\int_0^1 (1-t)(-1)\, dt = -\frac{t^2}{2} + t \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

4g) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz

$|f'(0)| > \max\{|f(z)| : |z| = 1\}$.

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta$$

$$\Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} \right|_{\partial B_1(0)} \cdot 2\pi$$

$$= |f|_{\partial B_1(0)}$$

5b)