Zu 35)

a) $\Rightarrow$ b) ✓

b) $\Rightarrow$ c): Wir wollen beweisen, dass $(p_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ~~gleichm~~ punktweise für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, denn

falls $p_n(c_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} b_j$, $j = 0, \dots, d$,

dann gilt wegen der Lagrange-Interpolation

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{d} p_n(c_j) \frac{\prod_{k\neq j}(z-c_k)}{\prod_{k\neq j}(c_j-c_k)} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\sum_{j=0}^{d} b_j \frac{\prod_{k\neq j}(z-c_k)}{\prod_{k\neq j}(c_j-c_k)} = p(z)$$

(wobei p ein Polynom vom Grad $\leq d$ ist.)

Schreiben wir $p_n(z) = \sum_{j=0}^{d} a_{n,j} z^j$ und

$$p(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j$$

dann bleibt zu zeigen, dass $a_j = \lim_{n\to\infty} a_{n,j}$ gilt.

Schauen wir uns an:

$$p(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) \qquad (*)$$

$z = 0$ so erhalten wir $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n,0}$

$$(*) \iff 0 = \lim_{n\to\infty} \left(p_n(z) - p(z)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{d} (a_{n,j} - a_j)\, z^j$$

Setzen wir für z die Werte $2^0, 2^1, \dots, 2^{d-1}$ so erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 & \cdots & 2^0 \\ 2^1 & 2^{1\cdot 2} & & 2^{1\cdot d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2^{d-1} & 2^{(d-1)\cdot 2} & \cdots & 2^{(d-1)\cdot d} \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} a_{n,1} - a_1 \\ a_{n,2} - a_2 \\ \cdots \\ a_{n,d} - a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A ist eine ~~[illegible]~~ VANDERMONDE Matrix deshalb ist A regulär.

Mittels elementaren Zeilenoperationen ist A diagonalisierbar in der Form

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_d \neq 0$$

da A' regulär ist. Die Zeilen von A' sind Linearkombination der Zeilen von A. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} A' \cdot \begin{pmatrix} a_{n,1} - a_1 \\ \cdots \\ a_{n,d} - a_d \end{pmatrix} = 0$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} k_d\,(a_{n,d} - a_d) = 0 \overset{k_d \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$a_d = \lim_{n\to\infty} a_{n,d}$$

dies in den vorletzten Zeile eingesetzt ergibt

$$\lim_{n\to\infty} k_{d-1}\,(a_{n,d-1} - a_{d-1}) + \sigma(a_{n,d} - a_d) = 0$$

wobei σ in der Zeile 1' anstelle von k_{d-1} steht.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} k_{d-1}\,(a_{n,d-1} - a_{d-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$a_{d-1} = \lim_{n\to\infty} a_{n,d-1}$$

so fortfahrend erhält man schließlich

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} a_{n,1}.$$

B) → a) ein Beweis mit stetiger Konvergenz.

z.z.: (p_n) konvergiert stetig (dann konvergiert die Folge auch kompakt!)

Sei (z_n) eine Folge mit $z = \lim z_n$

Dann existiert auch $\lim_{n\to\infty} p_n(z_n) =$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{d} a_{n,j} z_n^j = \sum_{j=0}^{d} \lim_{n\to\infty}\left(a_{n,j} z_n^j\right) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j.$$

36) Sei P ein Polynom vom Grad $n \geq 1$.

$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $\quad a_n \neq 0$.

z.z.: P ist <u>nicht</u> beschränkt.

Für $z \neq 0$ ist

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Sei $|z| > R > 1 \implies |z^j| = |z|^j > R^j$

$$\implies \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|a_0|}{R^n}.$$

$$\leq \max\{|a_j| : 0 \leq j \leq n-1\} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R^j}$$

$< |a_n|$ falls R hinreichend groß ist.

Sei also R hinreichend groß, $|z| > R$.

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|$$

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right)$$

$$\geq |z|^n \Big(\underbrace{|a_n| - \max\{|a_j| : 0 \leq j \leq n-1\} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R^j}}_{=: \, \varepsilon \, > \, 0} \Big)$$

wählt man $|z| > M > R$ dann ist

$$|P(z)| \geq M^n \varepsilon$$

Für $M \to \infty$ ist dieser Ausdruck <u>nicht</u> nach oben beschränkt, da $n \geq 1$.

Also ist P <u>nicht</u> beschränkt!

ZZ: a) $\Rightarrow$ b).

(p_n) konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ (p_n) ist eine Cauchyfolge auf $\mathbb{C}$. D.h.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: |p_n - p_m|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$ für $n, m > N_\varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$: $n, m > N_\varepsilon$: $|p_n - p_m|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$.

Insbesondere: $|p_n - p_{N_\varepsilon + 1}|_{\mathbb{C}} < \varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon$

$\Rightarrow$ $p_n - p_{N_\varepsilon + 1}$ ist ein konstantes Polynom

(sonst wäre die Differenz nicht beschränkt!)

es gibt also eine Folge $(c_n)_{n > N_\varepsilon}$ mit

$p_n - p_{N_\varepsilon+1} = c_n$, also $p_n = p_{N_\varepsilon + 1} + c_n$

für $n > N_\varepsilon$.

Beh: (c_n) ist eine Cauchyfolge:

$\forall \delta > 0 \ \exists N_\delta \in \mathbb{N}: |p_n - p_m|_{\mathbb{C}} < \delta$ für $n, m > N_\varepsilon$

Falls n, m auch größer als N_ε sind gilt:

$\delta > |p_{N_\varepsilon+1} + c_n - p_{N_\varepsilon+1} - c_m|_{\mathbb{C}} = |c_n - c_m|$

Also ist (c_n) eine Cauchyfolge, und da $\mathbb{C}$ vollständig ist, ist (c_n) eine konvergente Folge. Wähle $N = N_\varepsilon + 1$.

zz: b) => a)

zz: (p_n) ist eine Cauchyfolge auf $\mathbb{C}$, denn dann konvergiert diese Folge gleichmäßig auf $\mathbb{C}$.

Sei $n, m > N$, dann ist

$$|p_n - p_m|_{\mathbb{C}} = |p_N + c_n - p_N - c_m|_{\mathbb{C}} =$$

$$|c_n - c_m|$$

Da $(c_n)_{n > N}$ eine Cauchyfolge ist, ist auch (p_n) eine Cauchyfolge auf $\mathbb{C}$. Denn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |c_n - c_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon$$

da $N_\varepsilon > N$ sein muss gilt:

$$|p_n - p_m|_{\mathbb{C}} < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon.$$