16) Die Menge $X_1 = \{iy \mid y \in \mathbb{R}, |y| \leq 1\}$ ist zusammenhängend als Bild des zusammenhängenden Intervalls $I_1 := [-1, 1]$ unter der stetigen Abbildung $t \mapsto it$.

Die Menge $X_2 = \{x + iy \mid 0 < x \leq 1, \ y = \sin(\frac{1}{x})\}$ ist zusammenhängend als Bild des zusammenhängenden Intervalls $I_2 = (0, 1]$ unter der stetigen Abbildung

$t \mapsto t + i \sin(\frac{1}{t})$.

Um zu zeigen, dass X zusammenhängend ist, zeigen wir, dass jede lokal konstante Funktion auf X konstant ist.

Sei $f : X \to \mathbb{C}$ lokal konstant, dann sind $f|_{X_1} = c_1$ und $f|_{X_2} = c_2$ konstant, da X_1, X_2 zusammenhängend sind.

f lokal konstant. Zu $i \in X$ existiert $r > 0$ so dass $f|_{B_r(i)}$ konstant ist.

$B_r(i)$ enthält Elemente von X_1 aber auch Elemente von X_2

denn: $\sin x = 1 \iff x = \frac{(4k+1)\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\sin \frac{1}{x} = 1 \iff x = \frac{2}{(4k+1)\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{2}{(4k+1)\pi} = 0$$

also existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass für $x = \frac{2}{(4k_0+1)\pi}$

$x + i \in X_2 \cap B_r(i)$.

Also ist $c_1 = c_2$ und daher f konstant.

X ist nicht wegzusammenhängend.

Indirekte Annahme: X sei wegzusammenhängend, dann existiert ein Weg in X, der $0 \in X_1$ und $1 + \sin(1) \in X_2$ verbindet.

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = 1 + i \sin 1$, $\gamma(1) = 0$
γ stetig

Falls $\operatorname{Re} \gamma(t) > 0$ so ist $\gamma(t) \in X_2$.

Also verläuft γ entlang X_2.

Es existiert dann $t_0 \in [0,1]$ mit

$\operatorname{Re} \gamma(t_0) = 0$ und

$\operatorname{Re} \gamma(t) > 0$ für alle $t < t_0$.

Also ist für $t < t_0$

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i \sin\left(\frac{1}{\gamma_1(t)}\right)$$

mit $\gamma_1 : [0, t_0] \to [0,1]$ stetig

$\gamma_1(0) = 1$, $\gamma_1(t_0) = 0$, $\gamma_1(t) \neq 0$ für $t < t_0$.

Da γ stetig ist, ist γ stetig in t_0,

also auch $\sin\left(\frac{1}{\gamma_1(t)}\right)$ ~~stetig~~ stetig in t_0

$\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \sin\left(\frac{1}{\gamma_1(t)}\right) = \lim\limits_{\substack{s \to 0 \\ s > 0}} \sin\left(\frac{1}{s}\right)$ existiert aber

nicht, also kann γ in t_0 nicht stetig sein.

Widerspruch.

23) $|z|^n = |z^n| = \left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^n = (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$

$u: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R} \qquad u(z) = \log|z^n| = \log(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}} =$

$\frac{n}{2}\log(x^2+y^2)$

zz: u ist harmonisch, d.h. zz: $u_{xx}+u_{yy} = 0$ in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Sei $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow x^2+y^2 \neq 0$. Also

$$u_x(x,y) = \frac{n}{2}\,\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{nx}{x^2+y^2}$$

$$u_{xx}(x,y) = \frac{n(x^2+y^2) - nx\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{n(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y(x,y) = \frac{ny}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad u_{yy} = \frac{n(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Also ist $u_{xx}+u_{yy} = 0$.

Falls $u+iv$, $v: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, holomorph ist, dann gelt $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$.

Aus $v_y = u_x$ folgt $v_y = \frac{nx}{x^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{n}{x}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

Also ist $v(x,y) = n\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$ falls $x \neq 0$.

Aus $v_x = -u_y$ folgt $c'(x) = 0$ also $c(x) = c$ konstant.

Also $v(x,y) = n\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$ falls $x \neq 0$.

Falls $u+iv$ holomorph in $\mathbb{C}^*$, dann ist $u+iv$ in $\mathbb{C}^*$ stetig.

Die Funktion $v(x,y)$ ist aber für $y \neq 0$ nicht stetig nach $(0,y)$ fortsetzbar, denn

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{t\to-\infty} \arctan t = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$$

also $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\operatorname{sgn}(y)\,\frac{\pi}{2}$$

und $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{sgn}(y)\,\frac{\pi}{2}.$$

24). Die Behauptung gilt im allgemeinen <u>nicht</u>.

z.B. ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $z \mapsto z$ holomorph auf $D = \mathbb{C}$. Die Menge $\{z \in D \mid f(z) = \bar{z}\} = \mathbb{R}$.

Diese Menge enthält Häufungspunkte, ~~denn~~ jedes $r \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$. Denn für jedes $\varepsilon > 0$ liegen im Durchschnitt $(B_\varepsilon(r)\setminus\{r\}) \cap \mathbb{R}$ <u>unendlich</u> viele reelle Zahlen.

25) Sei $c \in D$.

Zu zeigen, es gibt eine Funktion $g_1 : D \to \mathbb{C}$, die stetig in c ist, so dass $g(z) = g(c) + (z-c)\, g_1(z)$ für $z \in D$.

Sei $c \in D$.

f ist in $\bar{c}$ komplex differenzierbar.

Also existiert $f_1 : D \to \mathbb{C}$, stetig in $\bar{c}$, so dass

$$f(z) = f(\bar{c}) + (z - \bar{c})\, f_1(z)$$

Also ist

$$\overline{f(z)} = \overline{f(\bar{c})} + (\bar{z} - c)\, \overline{f_1(z)}$$

Da $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ ist $\overline{f(z)} = g(\bar{z})$

Setze $g_1(z) := \overline{f_1(\bar{z})}$, $z \in D$.

dann ist $\overline{f_1(z)} = g_1(\bar{z})$.

Das heißt:

$$g(\bar{z}) = g(c) + (\bar{z} - c)\, g_1(\bar{z}), \quad z \in D.$$

Da $D = \{ \bar{z} \mid z \in D \}$ ist gilt dann auch

$$g(z) = g(c) + (z - c)\, g_1(z), \quad z \in D.$$

Da f_1 in $\bar{c}$ stetig ist ist auch die Abb.

$z \mapsto \overline{f_1(z)}$ in $\bar{c}$ stetig und die

Abbildung $z \mapsto \overline{f_1(\bar{z})}$ ist dann in c stetig.

Also ist g_1 in c stetig.