Lösungshinweise für das 1. Übungsblatt

1. Nachrechnen unter Verwendung von Regeln für den Betrag.

2. $-i$

3. $3+i$, $-2i$.

   Welche Methoden verwende ich?
   Warum kann man die aus $\mathbb{R}$ bekannte Lösungs=formel verwenden? Achtung: $\sqrt{\ }$ ist keine Funktion!

4. Beweisen Sie, dass die einzelnen Axiome erfüllt sind.

   Nachrechnen: Summe (und Produkt) zweier Matrizen aus $\mathbb{H}$ liegt wieder in $\mathbb{H}$.
   Neutrales Element bzgl $+$ (bzgl. $\cdot$) liegt in $\mathbb{H}$.
   Falls $A \in \mathbb{H}$ dann liegt $-A$ (oder A^{-1}) in $\mathbb{H}$.
   (die Gestalt der neutralen bzw. inversen Elemente erhält man aus der Theorie der 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$.)
   Die Gültigkeit von Assoziativgesetz $+, \cdot$, Kommutativgesetz $+$, Distributivgesetz folgt aus der Theorie der 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$.
   Anhand eines Beispiels zeigt man, dass
   - i.a. nicht kommutativ ist. $j \cdot k \neq k \cdot j$.

5) Multiplikationstafel aufstellen.
man sieht in der Diagonale steht

2x die 1 oder 6x die −1.

um $X^2 = 1$ bzw $X^2 = -1$ in $\mathbb{H}$ zu lösen

berechnet man $\begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} w^2 - z\bar{z} & -z(w+\bar{w}) \\ \bar{z}(w+\bar{w}) & \bar{w}^2 - z\bar{z} \end{pmatrix}$$

zu $X^2 = 1$:

$w^2 - |z|^2 = 1 \qquad (w+\bar{w})z = 0$

Falls $z = 0 \Rightarrow w = \pm 1$

Falls $z \neq 0 \Rightarrow w \in i\mathbb{R}$, $w^2 \leq 0$

Widerspruch zu $w^2 - |z|^2 = 1$.

zu $X^2 = -1$

$w^2 - |z|^2 = -1 \qquad (w+\bar{w})z = 0$

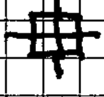
Falls $z = 0 \Rightarrow w = \pm i$

Falls $z \neq 0 \Rightarrow w \in i\mathbb{R}$

$\{(z,w) \in \mathbb{C} \mid X^2 = -1\} =$

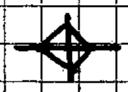
$\{(x, ib) \mid |b| < 1,\ x \in \mathbb{C},\ |x| = 1 - b^2\}$.

6) Eigenschaften einer Metrik nachrechnen für $\hat{d}$ und $\tilde{d}$.

Einheitskreis bzgl. $\hat{d}$ ist ein Quadrat 

dieser enthält den Einheitskreis bezgl. d:

dieser enthält den Einheitskreis bezgl. $\tilde{d}$,

der selbst wieder ein Quadrat ist 

Diesem kann nun ein Kreis vom Radius $r \leq \frac{1}{2}$ bezügl. $\hat{d}$ eingeschrieben werden.

7) Sei $x \in M$, dann ist

$\{x\}$ offen, denn $B_1(x) = \{x\} \subseteq \{x\}$.

Sei $A \subseteq M$, dann ist $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ offen

als beliebige Vereinigung offener Mengen.

Also ist jede Teilmenge A von M offen.

Sei $A \subseteq M$, dann ist $M \setminus A \subseteq M$,

also $M \setminus A$ offen, also A abgeschlossen.

8) Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein ε-Netz

$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ von X. ($n \in \mathbb{N}$).

Seien $x, x' \in X$, dann existieren $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$\cancel{d(x,x')}$ $d(x, x_i) < \varepsilon$ und $d(x', x_j) < \varepsilon$

Also ist $d(x,x') \leq d(x,x_i) + d(x_i,x_j) + d(x_j,x')$

$< 2\varepsilon + \max\{d(x_i,x_j) \mid i,j \in \{1\ldots n\}\} =: R.$

Also ist $\delta(X) < R$.

Sei $x_0 \in X$, dann ist $X \subseteq B_R(x_0)$

9. Es gibt $R > 0$ so dass

$-R \leq \operatorname{Re} x \leq R, \quad -R \leq \operatorname{Im} x \leq R$ für $x \in X$.

Zerlege $Q := \{a + ib \mid -R \leq a, b \leq R\}$

in $4n^2$ Teilquadrate ($n \in \mathbb{N}$) der Form

$$Q_{st} := \Big\{a + ib \;\Big|\; -R + \frac{sR}{n} \leq a \leq -R + \frac{(s+1)R}{n},$$
$$-R + \frac{tR}{n} \leq b \leq -R + \frac{(t+1)R}{n}\Big\}, \quad 0 \leq s,t < 2n.$$

Falls $Q_{st} \cap X$ wähle $x_{st} \in Q_{st} \cap X$.

$$\delta(Q_{st}) = \sqrt{2}\,\frac{R}{n}$$

Sei $\varepsilon > 0$. wähle n so groß, dass

$\sqrt{2}\,\frac{R}{n} < \varepsilon$, dann ist $Q_{st} \subseteq B_\varepsilon(x_{st})$

für $(s,t) \in I := \{(s,t) \mid 0 \leq s,t < 2n,\ Q_{st} \cap X \neq \emptyset\}$.

I ist eine endliche Menge

$X \subseteq \bigcup_{(s,t) \in I} B_\varepsilon(x_{s,t})$. Also ist

$\{x_{s,t} \mid (s,t) \in I\}$ ein ε-Netz von X.

10.) (M,d) vollständig, $\emptyset \neq X \subseteq M$

X ist vollständig $\Leftrightarrow$ X ist abgeschl.

$\Rightarrow$: (x_n) konvergente Folge in X $\Rightarrow$
(x_n) eine Cauchy Folge in X $\Rightarrow$
$\lim x_n \in X$ also X abgeschlossen

$\Leftarrow$: (x_n) eine Cauchy Folge in X $\Rightarrow$ eine Cauchy Folge in M $\Rightarrow$ (x_n) konvergiert in M, da X abgeschlossen $\lim x_n \in X$, also X vollständig.

11) a) Beh.: $X \cap U$ liegt dicht in U.

zz: Sei V offen in U, dann ist $V \cap (X \cap U) \neq \emptyset$.
sei V offen in U, dann existiert V' offen in M mit $V = V' \cap U$. Da X dicht in M ist
$\emptyset \neq V \cap X = V \cap (X \cap U)$.

b) Gegenbeispiel: $(M,d) = (\mathbb{R}, d)$ $X = \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
$A = \{\sqrt{2}\}$ ist abgeschlossen
$\mathbb{Q} \cap A = \emptyset$ liegt <u>nicht</u> dicht in A.

12) Verwenden Sie die Heine Borel Eigenschaft.
Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $\{a\} \cup \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Es gibt $i_0 \in I$ mit $a \in U_{i_0}$, da $a = \lim_{n\to\infty} z_n$ liegen in U_{i_0} fast alle z_n. D.h. außerhalb liegen nur endlich viele, die dann mit einer endlichen Teilüberdeckung erfasst werden können.

13) f ist stetig $\Leftrightarrow$ $f|_K$ ist stetig für jedes Kompaktum $K \subseteq M_1$.

$\underline{\Rightarrow}$: ist f stetig, so ist $f|_K$ stetig.

$\underline{\Leftarrow}$: Sei $a \in M_1$. z.z. f ist stetig in a.

d.h. z.z. für jede Folge (x_n) in M_1 mit $\lim x_n = a$ gilt $\lim f(x_n) = f(a)$. Sei (x_n) so eine Folge:

Setze $K = \{a\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$f|_K$ ist stetig, also ist $\lim f(x_n) = f(a)$

Das gilt für jede Folge (x_n) mit $\lim x_n = a$.

Also f stetig in a. Das gilt für jedes $a \in M_1$

Also f stetig in M_1.

14) f ist stetig $\Leftrightarrow$ für jedes $X \subseteq M_1$ gilt: $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$

$\underline{\Rightarrow}$: Falls $X = \emptyset$: $f(\overline{\emptyset}) = f(\emptyset) = \emptyset = \overline{f(\emptyset)}$

Falls $X \neq \emptyset$. Falls $\overline{X} = X$ ist $f(\overline{X}) = f(X) \subseteq \overline{f(X)}$

Falls $\overline{X} \supset X$ sei $x \in \overline{X} \setminus X \Rightarrow x$ ist Häufungspunkt von X

Sei (x_n) eine Folge in X mit $\lim x_n = x$.

Da f stetig ist ist $\lim f(x_n) = f(x)$. Da $f(x_n) \in f(X)$ ist $f(x) \in \overline{f(X)}$, also $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

$\underline{\Leftarrow}$: Annahme es gibt $x_0 \in M_1$, wobei f nicht stetig in x_0 ist. ~~Sei (x_n) eine Folge in M_1 und $\lim x_n = x_0$ so dass~~

Es gibt $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_n) mit $\lim x_n = x_0$ und $d_2(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ für alle n.

Setze $X = \{x_n \mid n \geq 1\}$, dann ist $x_0 \in \overline{X}$ aber $f(x_0) \notin \overline{f(X)}$. Widerspruch zu $f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$.

15) Verwende die diskrete Metrik D auf $\mathbb{C}$

Sei $x \in \mathbb{C}$. Beh: id ist <u>nicht</u> stetig in x.

Setze $\varepsilon = 1/2$.

Für jedes $\delta > 0$ und jedes

$y \in \mathbb{C}$ mit $y \neq x$, $d(x,y) < \delta$ gilt

$D(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) = D(x,y) = 1 > \varepsilon$.

<u>Bemerkung</u>: Falls wir $(\mathbb{C}, D)$ als Definitionsbereich von Funktionen betrachten, dann ist jede Funktion $f : (\mathbb{C}, D) \to (\mathbb{C}, d)$ stetig !!

(Wobei D wieder die diskrete Metrik ist!).