Proseminar Analysis I, SS 11

1. Klausur

1. Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit a, $b \geq 0$. Zeigen Sie

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad .$$

2. Bestimmen Sie (falls möglich) Minimum, Maximum, Infimum, Supremum der Menge

$$\{\frac{3n+1}{5n-1} \mid n \in \mathbb{N}\} \quad .$$

3. Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n}) \quad \text{für } n \geq 1 \quad .$$

(a) Zeigen Sie $x_n \geq \sqrt{3}$ für alle $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist und bestimmen $\lim_{n\to\infty} x_n$.

4. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \quad .$$

5. Konstruieren Sie eine Folge, sodass 1, 2, 3, 4 Häufungswerte dieser Folge sind.