9. Proseminar Analysis I

10.6.2010

1. Seien X und Y normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $D \subseteq X$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n \colon D \to Y$ und $f \colon D \to Y$ Abbildungen, wobei die f_n stetig sein sollen. Weiters sei $(x_n)_{n\geq 1}$ ein Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in D$. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Wenn die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert $f_n(x_n)$ notwendigerweise gegen $f(x)$.

   (b) Wenn die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise (aber i.a. nicht gleichmäßig) gegen f konvergiert, dann konvergiert $f_n(x_n)$ notwendigerweise gegen $f(x)$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(t) = nte^{-nt}$ eine reelle Funktion. Beweisen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[0,\infty)$ punktweise und für jedes $\varepsilon > 0$ auf $[\varepsilon,\infty)$ gleichmäßig konvergiert.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x + 1/n & \text{falls } x > 0, \\ 1/n & \text{falls } x = 0, \end{cases} \qquad x \in [0,\infty),$$

   $g_n(x) = 1/n$, $x \in [0,\infty)$. Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig auf $[0,\infty)$ aber $(f_n \cdot g_n)_{n\geq 1}$ nicht gleichmäßig auf $[0,\infty)$ konvergiert.

4. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \big(1 + (-1)^n\big) n^3 z^n.$$

5. (*Näherungsweise Berechnung der natürlichen Logarithmen*) Es sei $a > 0$ und es sei $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := x - 1 + ae^{-x}$. Zeigen Sie:

   (a) $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (Fallunterscheidungen für $x \geq 0$, $x \leq -1$ und $x \in (-1,0)$.)

   (b) $g(\mathbb{R}) \subseteq [\ln(a),\infty)$.

   (c) Wenn $x \geq \ln(a)$, dann ist $g(x) \leq x$.

   (d) Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert die durch $x_{n+1} := g(x_n)$ definierte Folge gegen $\ln(a)$.

   (e) $|x - \ln(a)| = x - \ln(a) \leq e^x a^{-1} - 1$, wenn $x \geq \ln(a)$.

   (f) Freiwillig zu lösende Zusatzaufgabe: Entwickeln Sie einen Algorithmus, der zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und gegebenem $a > 0$ eine Zahl ξ berechnet, so dass $0 \leq \xi - \ln(a) < \varepsilon$. Testen Sie Ihr Verfahren für $\varepsilon = 10^{-5}$ und $a \in \{2, 10\}$.

   Hinweis: Setzen Sie x als $y + \ln(a)$ an mit $y \in \mathbb{R}$ oder $y \geq 0$.