7. Proseminar Analysis I

20.5.2010

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen Grenzwerte bei $x = 0$ besitzen, und ob sie an der Stelle $x = 0$ stetig sind.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } x > 0 \\ 1 - x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\mathrm{e}^{-1/|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Hinweis (auch für die dritte Aufgabe): $\lim_{z\to\infty} z\mathrm{e}^{-z} = 0$.

2. Seien X, Y und Z normierte Räume, $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Seien $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Falls $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $z_0 = \lim_{y\to y_0} g(y)$, dann ist $z_0 = \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$.

   (b) Falls $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $z_0 = \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$, dann ist $z_0 = \lim_{y\to y_0} g(y)$.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{y}\right|\mathrm{e}^{-|x/y|} & \text{falls } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und unstetig in $(0,0)$ ist.

4. Sei $f\colon \mathbb{Q} \cap (0,\infty) \to \mathbb{Q}$ definiert durch $f(x) = 1/q$, falls x die (eindeutige) Darstellung der Form $x = p/q$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q besitzt. Ist f stetig?

5. Sei X ein (nicht notwendigerweise endlichdimensionaler) normierter Raum und seien A, B zwei kompakte Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ ebenfalls kompakt ist.