5. Proseminar Analysis I

22.4.2010

1. Seien $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ und $(z_n)_{n\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ auch gegen a konvergiert.

2. Seien $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ beschränkte Folgen in $[0,\infty)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $\limsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n \limsup_{n\to\infty} y_n$.

   (b) $\liminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \limsup_{n\to\infty} y_n$.

3. Die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ sei rekursiv gegeben durch $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_n = 1+\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{4}x_{n-2}$, $n \geq 2$.

   (a) Unter der Annahme, dass die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiere, bestimmen Sie ihren Grenzwert x.

   (b) Zeigen Sie: Eine Folge $(\xi_n)_{n\geq 0}$ konvergiert genau dann gegen ξ, wenn die Folge $(\xi_n - \xi)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist.

   (c) Bestimmen Sie die rekursive Formel, die die Folge der $y_n := x_n - x$, $n \geq 0$, erfüllt, und zeigen Sie, dass $(y_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist, indem Sie die folgende Behauptung beweisen: Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n gilt

$$|y_{2n}|,\ |y_{2n+1}| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \max\{|y_0|,\ |y_1|\}.$$

4. Durch $x_0 > 1$ und $x_n = (2x_{n-1} - 1)/x_{n-1}$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

   (a) $x_n > 1$ für alle $n \geq 0$.

   (b) $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \geq 0$.

   (c) Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent.

   Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.

5. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum X. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.