4. Proseminar Analysis I

25.3.2010

1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $x_0 \in X$, $r > 0$. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{K}(x_0, r)$ abgeschlossen in X ist.

2. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, I eine (endliche oder unendliche) Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine offene Teilmenge von X. Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel:

   (a) $\bigcup_{i\in I} M_i$ ist offen in X. (b) $\bigcap_{i\in I} M_i$ ist offen in X.

3. Sei c_{00} der Folgenraum
$$c_{00} = \left\{ (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \;\middle|\; u_i \in \mathbb{R},\ \text{es existiert } i_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } i > i_0 \text{ gilt } u_i = 0 \right\}$$
mit der üblichen Vektorraumstruktur, d. h. $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} + (v_i)_{i\in\mathbb{N}} = (u_i + v_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\lambda(u_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, für $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}, (v_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Auf c_{00} seien zwei Normen definiert:
$$\|(u_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_\infty := \max_{i\in\mathbb{N}} |u_i|, \qquad \|(u_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_1 := \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|.$$
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x^{(n)} = (u_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}} \in c_{00}$. Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel:

   (a) Aus $\|x^{(n)}\|_1 \to 0$ folgt $\|x^{(n)}\|_\infty \to 0$.
   (b) Aus $\|x^{(n)}\|_\infty \to 0$ folgt $\|x^{(n)}\|_1 \to 0$.
   (c) Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent auf c_{00}.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei f_n die Abbildung von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ gegeben durch
$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}\,.$$
   (a) Bestimmen Sie die Supremumsnorm $\|f_n\|_\infty$ auf $[0,1]$.
   (b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
   (c) Gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0$?

5. Entscheiden Sie, ob die Grenzwerte der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ existieren. Wenn ja, bestimmen Sie die Grenzwerte.

   (a) $x_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+1} \\ \frac{n}{2n+3} \end{pmatrix}$, (b) $x_n = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{3n+5} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \end{pmatrix}$, (c) $x_n = \begin{pmatrix} \frac{n^{333}}{(1+1/11)^n} \\ (\frac{5}{3})^n \end{pmatrix}$.

   Hinweis zu (b): Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+a} = 1$ für $a > 0$.

6. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Was kann man über das Konvergenzverhalten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sagen? Beweisen Sie Ihre Antwort.