3. Proseminar Analysis I

18.3.2010

1. Sei $(M, \leq)$ eine total geordnete Menge, und jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitze ein Supremum. Zeigen Sie, dass in M das Vollständigkeitsaxiom gilt. D.h., zu jedem Paar (A, B) von Teilmengen von M mit den Eigenschaften

   - $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
   - $A \cup B = M$,
   - aus $a \in A$ und $b \in B$ folgt $a < b$,

   existiert ein $\xi \in M$ so dass für alle $x \in M$ gilt: Aus $\xi < x$ folgt $x \in B$ und aus $x < \xi$ folgt $x \in A$.

2. Seien A und B nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ ist $a \leq b$.

   (b) $\sup(A) \leq \inf(B)$.

3. Seien p, q, r, $s \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für jede positive reelle Zahl x gilt

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = x^{\frac{pr}{qs}}.$$

4. Zeigen Sie, dass in $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ jedes Element ein eindeutig bestimmtes Inverses besitzt.

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := (0, \frac{1}{n})$, $J_n := [0, 1 + \frac{1}{n}]$, $K_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x > n\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehungen $I_{n+1} \subseteq I_n$, $J_{n+1} \subseteq J_n$, $K_{n+1} \subseteq K_n$ gelten.

   (b) Bestimmen Sie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.