10. Proseminar Analysis I

24.6.2010

(1) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stelle in ihrem Konvergenzbereich K eine gerade Funktion f dar. Zeigen Sie, dass $a_{2n+1} = 0$ ist für alle $n \geq 0$.
(Hinweis: Verwenden Sie, dass $f(x) - f(-x) = 0$ für alle $x \in K$.)

(2) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n der Potenzreihendarstellung von

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $n \leq 6$.
Warum läßt sich $1/\cos(x)$ an der Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln?

(3) Sind die Funktionen f, g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x = 0$ stetig und/oder differenzierbar?

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Sei $f\colon D \to \mathbb{K}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, dass f in x_0 genau dann differenzierbar ist, wenn es eine Funktion $F\colon D \to \mathbb{K}$ gibt, die in x_0 stetig ist, so dass für alle $x \in D$ gilt $f(x) = f(x_0) + F(x)(x - x_0)$.