1. Proseminar Analysis I

4.3.2010

1. $\varphi: A \to B$ sei eine Abbildung und $A', A'' \subset A$, $B', B'' \subset B$ seien Teilmengen. Zeigen Sie:

   (a) $\varphi(A' \cap A'') \subset \varphi(A') \cap \varphi(A'')$. Ist φ injektiv, so sind die beiden Mengen sogar gleich. Geben Sie ein Beispiel für Ungleichheit an!

   (b) $\varphi(A' \cup A'') = \varphi(A') \cup \varphi(A'')$.

   (c) $\varphi^{-1}(B' \cup B'') = \varphi^{-1}(B') \cup \varphi^{-1}(B'')$.

   (d) $\varphi^{-1}(B' \setminus B'') = \varphi^{-1}(B') \setminus \varphi^{-1}(B'')$.

2. Bestimmen Sie für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 1$, und alle $y \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}(\{y\})$.

3. (a) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$.

   (b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\psi: \mathbb{R} \to (-1, 1)$, definiert durch $\psi(x) := \frac{x}{1+|x|}$, bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion ψ^{-1}.

4. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $bd \neq 0$. Zeigen Sie, daß $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ und daß $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$.

5. Zeigen Sie:

   (a) Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$. Dann ist $a < \frac{a+b}{2} < b$.

   (b) Gilt für $a, b \in \mathbb{R}$, daß $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, so ist $a \leq b$.

6. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $x \leq |x|$, $|-x| = |x|$, $|x| \geq 0$.

   (b) Es sei zusätzlich $b \geq 0$. Dann sind die Aussagen $|x| \leq b$ und $-b \leq x \leq b$ gleichwertig.