Lösungen zum Zwischentest PS Analysis, WS 2010

1a) Wir betrachten zunächst die Bestandteile der Folge:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{bekannt aus Vorlesung} \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+98}{2(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+98n^{-2}}{2+4n^{-1}+2n^{-2}} = \frac{1}{2}, \\
&\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{n^2+98}{2(n+1)^2} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Vor der Klammer steht ein alternierendes Vorzeichen. Wir betrachten die Teilfolgen mit den geraden und den ungeraden Indizes:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} \left(\sqrt[2k]{2k} - \frac{(2k)^2+98}{2(2k+1)^2} \right) = \frac{1}{2}, \\
&\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} \left(\sqrt[2k+1]{2k+1} - \frac{(2k+1)^2+98}{2(2k+2)^2} \right) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Da die Folge zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten hat, konvergiert sie nicht.

1b) Würde man versuchen, die beiden Summanden separat zu betrachten, hätte man keinen Erfolg:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{(n+1)n} \right) \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{(n+1)n} = \infty - \infty?
\end{aligned}$$

Wir hätten die Folge in zwei divergente Teilfolgen zerrissen, die ursprüngliche Folge könnte aber trotzdem konvergent sein! Wir dürfen die Folge also nicht so zerlegen. Wir verwenden den bekannten Trick, die Differenz zweier Wurzeln zu erweitern ...

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{(n+1)n} \right) \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)-(n+1)n}{\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+1)n}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{(n+1)n}} \\
=\ &\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{(n+2)/(n+1)} + \sqrt{n/(n+1)}} \\
=\ &\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1.
\end{aligned}$$

2) Achten Sie auf die Definition von $\|x\|_2$. Dies ist nicht die ℓ_2-Norm

$$\|(u_i)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2},$$

sondern es ist laut Angabe in diesem Beispiel

$$\|(u_i)\|_2 = \frac{1}{2}|u_1| + \frac{1}{4}|u_2| + \frac{1}{8}|u_3| + \cdots .$$

a) Wir schätzen zuerst $\|(u_i)\|_2$ nach oben ab. Weil für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $2^{-i} < 1$, folgt sofort

$$\|(u_i)\|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|u_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_i| = \|(u_i)\|_1.$$

Ist daher $x^{(n)}$ eine Folge in c_{oo}, so gilt

$$0 \leq \|x^{(n)}\|_2 \leq \|x^{(n)}\|_1.$$

Konvergiert insbesondere $\|x^{(n)}\|_1 \to 0$, so konvergiert auch $\|x^{(n)}\|_2 \to 0$.

b) Die Umkehrung gilt nicht. Das zeigen wir durch ein einfaches Gegenbeispiel: Sei $x^{(n)} = (u_i^{(n)})$ mit

$$u_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq n, \\ 1 & \text{falls } i = n. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|x^{(n)}\|_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|u_i^{(n)}| = 2^{-n} \cdot 1 \to 0, \\ \|x^{(n)}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |u_i^{(n)}| = 1. \end{aligned}$$

Das ist natürlich nicht das einzige Gegenbeispiel. Ein gutes Gegenbeispiel beim Vergleich der Maximumnorm mit der Summennorm war $y^{(n)} = (v_i^{(n)})$ mit

$$v_i^{(n)} = \begin{cases} 1/n & \text{falls } i \leq n, \\ 0 & \text{falls } i > n. \end{cases}$$

Dieses Beispiel funktioniert auch hier:

$$\begin{aligned} \|y^{(n)}\|_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|v_i^{(n)}| = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}\frac{1}{n} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{n} \to 0, \\ \|y^{(n)}\|_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} |v_i^{(n)}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

3) Ein häufiger Fehler war die Verwechslung zwischen Supremum und Maximum. Da die Mengen M_i beschränkt sind, besitzen sie Suprema. Diese müssen aber nicht in M_i liegen! Es kann aber die Formulierung des Beweises erleichtern, wenn man berücksichtigt, dass die Menge $\{s_i \mid i = 1 \cdots N\}$ endlich ist, sodass ihr Supremum eines der Elemente s_i sein muß. Wir werden im folgenden Gedankengang davon aber gar nicht Gebrauch machen. Selbstverständlich gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, den Satz zu beweisen.

Als Kurzschreibweise setzen wir

$$\begin{aligned} m &= \sup\left(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\right), \\ r &= \sup\{s_i \mid i = 1 \cdots N\}. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist $m = r$.

Wir zeigen zunächst: $r \leq m$:

- Es ist m eine obere Schranke für $\bigcup_{i=1}^{N} M_i$, das heißt, für alle $y \in \bigcup_{i=1} M_i$ gilt $y \leq m$.

- Daher gilt für jedes $j = 1 \cdots N$: Ist $y \in M_j$, so ist erst recht $y \in \bigcup_{i=1}^{N} M_i$ und folglich $y \leq m$. Also ist m eine obere Schranke von M_j. Weil s_j als Supremum von M_j die kleinste obere Schranke von M_j ist, ist $s_j \leq m$.
- Daher ist also m eine obere Schranke von $\{s_j \mid j = 1 \cdots N\}$. Weil r als Supremum die kleinste obere Schranke dieser Menge ist, ist $r \leq m$.

Wir zeigen nun: $m \leq r$.

- Sei $y \in \bigcup_{i=1}^{N} M_i$. Dann gibt es ein $j \in \{1 \cdots N\}$ so, dass $y \in M_j$.
- Für dieses j gilt: Weil s_j als Supremum eine obere Schranke von M_j ist, gilt $y \leq s_j$.
- Weil r eine obere Schranke für $\{s_i \mid i = 1 \cdots N\}$ ist, gilt $s_j \leq r$. Daraus folgt $y \leq r$.
- Also ist r eine obere Schranke für $\bigcup_{i=1}^{N} M_i$. Weil m als Supremum die kleinste obere Schranke dieser Menge ist, ist $m \leq r$.

4)
Wir zeigen zuerst: $(a_n b_n)$ ist konstant:

$$a_{n+1} b_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n b_n.$$

Da die Folge $a_n b_n$ konstant ist, können wir uns gleich merken:

$$a_n b_n = a_1 b_1.$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion nach n, dass $a_n < b_n$:

- Induktionsanfang: $n = 1$: $a_1 < b_1$ nach Voraussetzung.
- Induktionsannahme: $a_n < b_n$, zeige $a_{n+1} < b_{n+1}$.
- Induktionsschritt:

$$\begin{array}{ll} \text{zu zeigen:} & \dfrac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} < \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ \text{zu zeigen:} & 4 a_n b_n < (a_n + b_n)^2 \\ \text{zu zeigen:} & (a_n + b_n)^2 - 4 a_n b_n > 0. \end{array}$$

  Es ist aber

$$(a_n + b_n)^2 - 4 a_n b_n = (a_n - b_n)^2 > 0$$

  weil (wegen der Induktionsannahme) $a_n \neq b_n$.

Wir zeigen: $b_{n+1} < b_n$. Wir werden dabei verwenden, dass wir bereits wissen, dass $a_n < b_n$.

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

Wir zeigen: $a_{n+1} > a_n$. Das folgt aus $b_{n+1} < b_n$ und der Tatsache, dass $a_n b_n$ konstant ist.

Wir zeigen: Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren. Es gilt ja (wegen der Monotonie der beiden Folgen und wegen der Ungleichung $a_n < b_n$)

$$a_1 < a_n < b_n < b_1.$$

Daher sind die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt, und weil sie auch monoton sind, konvergieren sie. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \to \infty} a_n, \\ \beta &= \lim_{n \to \infty} b_n. \end{aligned}$$

Wir zeigen: Die Grenzwerte sind gleich, also $\alpha = \beta$. Wir verwenden dazu die Rekursionsgleichung für b_{n+1}:

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} 2\beta &= \alpha + \beta, \\ \beta &= \alpha \end{aligned}$$

(Man könnte in diesem Schritt auch die Rekursionsgleichung für a_{n+1} verwenden.)

Endlich bestimmen wir den Grenzwert. Wir verwenden erst $a_n b_n = a_1 b_1$ und dann $\alpha = \beta$. Es ist

$$a_1 b_1 = \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta = \alpha^2.$$

Daher ist

$$\alpha = \beta = \sqrt{a_1 b_1}.$$