

Torische Varietäten, Explosionen und das Newtonpolyeder

DIPLOMARBEIT

IN DER STUDIENRICHTUNG TECHNISCHE MATHEMATIK
ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES
DIPLOM-INGENIEURIN

EINGEREICHT BEI
AO. UNIV.-PROF. DR. HERWIG HAUSER
AM INSTITUT FÜR MATHEMATIK AN DER
LEOPOLD-FRANZENS-UNIVERSITÄT INNSBRUCK

Eleonore Faber

INNSBRUCK, OKTOBER 2007

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
1 Torische Basics	1
1.1 Torische Ideale und Varietäten	3
1.2 Normale torische Varietäten	6
Kegel	6
Fächer	9
2 Auflösung von Singularitäten	11
2.1 Explosionen	11
Der affine Raum \mathbb{A}^n	12
Die Explosion von \mathbb{A}^n	12
2.2 Auflösung	14
2.3 Auflösung von torischen Hyperflächen im \mathbb{A}^n	15
Glatte und singuläre affine torische Hyperflächen	15
Transformation von Idealen unter Explosionen	18
Gleichung und Koordinatenring einer affinen torischen Hyperfläche	19
Algorithmus	22
3 Explosionen in monomialen Idealen	29
3.1 Symmetrien	29
Das Problem	29
Explosionen in nichtreduzierten monomialen Idealen	31
3.2 Newtonpolyeder und Explosionen	32
Einige Begriffe aus der konvexen Geometrie	32
Idealtangentenkegel im Newtonpolyeder und Explosionen	35
Kriterium der Glattheit	38
3.3 Explosion im Rosenbergyideal	40
3.4 Explosionen in Produkten von Idealen	43
Mehr von Koordinatenidealen	47
3.5 Bauchige Mengen	53
Die Explosion in bauchigen Mengen	59
3.6 Weitere Fragen	65
Literatur	66

Vorwort

In dieser Arbeit werden *torische Varietäten*, die Auflösung von torischen Hyperflächen und Explosionen des \mathbb{A}^n in monomialen Idealen betrachtet. Dies ist ein sehr breit gefächertes Gebiet, wobei Ideen aus Algebra, konvexer Geometrie und Kombinatorik verwendet werden.

Kapitel 1 bildet eine kurze Einführung in das Gebiet der torischen Varietäten. Dabei wird besonders auf Unterschiede zwischen der “klassischen” Theorie der torischen Einbettungen und der Theorie der torischen Ideale eingegangen.

In Kapitel 2 wird das Problem der Auflösung von Singularitäten algebraischer Varietäten vorgestellt. Dabei untersuchen wir bestimmte birationale Abbildungen, sog. *Explosionen*. Im Weiteren werden diese Abbildungen näher analysiert. Insbesondere werden die Auswirkungen von Explosionen auf affine torische Hyperflächen betrachtet. Schließlich entwickeln wir einen einfachen Algorithmus zur eingebetteten Auflösung affiner torischer Hyperflächen durch Explosionen und betrachten auch das Problem der Symmetrien im Auflösungsprozess.

Kapitel 3 bildet das Herzstück dieser Arbeit: Im Algorithmus von Kapitel 2 sind durch die von uns gewählten Explosionen Symmetrien der torischen Hyperfläche zerstört worden. Diese unerwünschten Folgeerscheinungen versuchen wir durch Explosionen in nichtreduzierten Zentren zu umgehen. Hier lauern ungeahnte Gefahren: Durch Explosionen in beliebigen monomialen Idealen kann der umgebende Raum einer affinen torischen Hyperfläche selbst singularär werden, und es kann von einer eingebetteten Auflösung keine Rede mehr sein!

Daher wird ein Glattheitskriterium der Explosion des \mathbb{A}^n in einem monomialen Ideal beschrieben, für das man nur das *Newtonpolyeder* des Ideals betrachten muss. Dadurch wird eine Verbindung von algebraischer Geometrie zu konvexer Geometrie geschaffen. Im Falle einer singularären Explosion betrachten wir eine Glättungsmethode (Rosenbergideal) und studieren weiters speziell Explosionen in Produkten von Koordinatenidealen. Einen völlig anderen Zugang zu diesem Problem bilden die sog. *bauchigen Mengen*, die bei Kompaktifizierungsproblemen auftreten. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit liefern wir mit Hilfe des Newtonpolyederkriteriums einen Beweis für die Glattheit der Explosion in einem Produkt von Koordinatenidealen, die eine *bauchige Menge* bilden.

Bedanken möchte ich mich bei allen, die mich unterstützt haben. Besonders hervorzuheben sind hier meine Eltern, die mir vor allem moralische Unterstützung geleistet haben, und mein Betreuer, Herr Prof. Herwig Hauser, der mir jederzeit mit fachkundigem Rat geholfen hat. Außerdem möchte ich besonders Julian Pfeifle, Clemens Bruscek und Dominique Wagner danken.

Innsbruck, Oktober 2007
Eleonore Faber

Kapitel 1

Torische Basics

Sei K ein Körper und $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen. Wir bezeichnen die Monome in $K[\mathbf{x}]$ mit $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} := x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$ und identifizieren sie mit den Punkten $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$. Ein Polynom f in $K[\mathbf{x}]$ ist eine endliche K -Linearkombination von Monomen, geschrieben

$$f(\mathbf{x}) = \sum \lambda_{(a_1, \dots, a_n)} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} =: \sum \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}.$$

Wie üblich nennen wir $\lambda_{\mathbf{a}}$ den *Koeffizienten* des Monoms $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Mit $|\mathbf{a}| := a_1 + \cdots + a_n$ bezeichnen wir den *Grad* eines Monoms. Weiters sei $\deg(f) := \max\{|\mathbf{a}|\}$ der *Grad* von f und $\text{ord}(f) := \min\{|\mathbf{a}|\}$ die *Ordnung* von f . Eine Teilmenge I in $K[\mathbf{x}]$ heißt *Ideal*, wenn für alle $f, g \in I$ auch ihre Summe in I liegt und für alle $f \in I$ und alle λ aus K auch λf in I ist. Wir nennen ein Ideal $I = (f_1, \dots, f_s)$ das von den f_i erzeugte Ideal. (Beachte: ein beliebiges Ideal I in $K[\mathbf{x}]$ wird nach dem Hilbertschen Basissatz immer von endlich vielen Polynomen erzeugt.)

Sei wieder K ein Körper und n eine positive natürliche Zahl. Wir bezeichnen die Menge

$$\mathbb{A}_K^n := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

als den n -dimensionalen *affinen Raum* über K . Wenn K nicht weiter spezifiziert werden muss, schreiben wir dafür meistens nur \mathbb{A}^n . Weiters gilt $\mathbb{A}^1 = K$. Somit können wir jedes Polynom $f \in K[x]$ als Funktion

$$f : \mathbb{A}^n \rightarrow K, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

auffassen. Eine derartige Funktion f heißt *Polynomfunktion*. Für eine Menge f_1, \dots, f_s in $K[x_1, \dots, x_n]$ setzen wir

$$V(f_1, \dots, f_s) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{A}^n : f_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq s\}$$

und nennen $V(f_1, \dots, f_s)$ die *affine algebraische Varietät* oder nur die *affine Varietät* definiert von f_1, \dots, f_s . Eine affine Varietät $V(f_1, \dots, f_s)$ in \mathbb{A}^n ist die Nullstellenmenge bzw. die Verschwindungsmenge der f_i . Wir werden affine Varietäten meist mit Großbuchstaben X, Y, V etc. bezeichnen. Falls $s = 1$, d.h. $X = V(f)$, sprechen wir von einer *affinen Hyperfläche*. Wir nennen allgemein eine Menge $A \subseteq \mathbb{A}^n$ eine *algebraische Menge*, wenn endlich viele Polynome f_1, \dots, f_s in $K[\mathbf{x}]$ existieren, sodass $A = V(f_1, \dots, f_s)$ gilt.

Für ein beliebiges Ideal $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ sei

$$V(I) := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{A}^n : f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \text{ für alle } f \in I\}.$$

Es gilt (siehe z.B. [CLO, ch. 2, §5, prop. 9]): $V(I)$ ist eine affine Varietät und falls I von Polynomen f_1, \dots, f_s erzeugt wird, so ist $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$.

Wir werden \mathbb{A}^n außerdem als topologischen Raum versehen mit der *Zariski-Topologie* betrachten: Eine Teilmenge A in \mathbb{A}^n ist abgeschlossen genau dann, wenn ein Ideal I in $K[\mathbf{x}]$ existiert, sodass $A = V(I)$ gilt. Der *Zariski-Abschluss* einer Menge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ist die kleinste algebraische Menge, die X enthält. Wir werden \mathbb{A}^n in Abschnitt 2.1 noch näher studieren.

Wir geben nun einige bekannte Beziehungen zwischen Idealen und Varietäten an. Für Beweise siehe z.B. [CLO]. Für eine affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n$ setzen wir

$$I(V) := \{f \in K[x_1, \dots, x_n] : f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \text{ für alle } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in V\}.$$

$I(V)$ ist ein Ideal in $K[\mathbf{x}]$ und heißt *das Ideal von V* .

Wir kommen zum Zusammenhang von Algebra und Geometrie. Eine affine Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n$ ist *irreduzibel*, wenn gilt: Immer wenn man V als $V = V_1 \cup V_2$ schreiben kann, wobei V_i affine Varietäten sind, dann ist entweder $V = V_1$ oder $V = V_2$. Ein Ideal I in $K[x_1, \dots, x_n]$ heißt *prim*, falls für alle $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit $fg \in I$ entweder $f \in I$ oder $g \in I$ ist. Damit können wir eine Bijektion zwischen irreduziblen algebraischen Varietäten und Primidealen herstellen (siehe [CLO, ch. 4, §5, prop. 3]): Wenn $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät ist, dann ist V genau dann irreduzibel, wenn $I(V)$ ein Primideal ist.

Falls K algebraisch abgeschlossen ist, gilt für ein beliebiges Ideal $J \subseteq K[\mathbf{x}]$ die Gleichung $I(V(J)) = \sqrt{J}$ (Hilbert'scher Nullstellensatz). Hier bezeichnet

$$\sqrt{J} := \{f \in K[\mathbf{x}] : f^m \in J \text{ für eine natürliche Zahl } m \geq 1\}$$

das *Radikalideal* von J .

Wir wollen affine Varietäten, die *geometrische* Objekte sind, mit Hilfe von *algebraischen* Techniken studieren. Daher werden wir nun kurz den Zusammenhang einer affinen Varietät V mit ihrem Koordinatenring $K[V]$ skizzieren.

Für Varietäten $V \subseteq \mathbb{A}^m$, $W \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt eine Funktion $\Phi : V \rightarrow W$ eine *polynomiale Abbildung*, wenn es Polynome $f_1, \dots, f_n \in K[x_1, \dots, x_m]$ gibt, sodass

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \dots, f_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m))$$

für alle $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in V$. Wir bezeichnen die Menge aller polynomialen Abbildungen $\Phi : V \rightarrow K$ mit $K[V]$. Man kann zeigen, dass $K[V]$ ein Ring ist, und dass es einen Ringisomorphismus $K[V] \cong K[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ gibt. Daher nennen wir $K[V]$ den *Koordinatenring* der affinen Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n$.

Bei der Betrachtung von torischen Varietäten und später Explosionen werden wir auch den *projektiven Raum* \mathbb{P}_K^n (meist nur mit \mathbb{P}^n bezeichnet) benötigen. Definiere dazu auf $\mathbb{A}_K^{n+1} = K^{n+1}$ eine Äquivalenzrelation \sim : Zwei von 0 verschiedene Punkte $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ in \mathbb{A}_K^{n+1} sind genau dann äquivalent, wenn

$$a \sim b :\Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* : (a_0, a_1, \dots, a_n) = (\lambda b_0, \lambda b_1, \dots, \lambda b_n).$$

Dann nennt man $\mathbb{P}_K^n := \mathbb{A}_K^{n+1}/\sim$ den *n -dimensionalen projektiven Raum über K* . Jedes $(n+1)$ -Tupel $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{A}_K^{n+1}$ definiert einen Punkt $p \in \mathbb{P}_K^n$. Wir nennen $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ die *homogenen Koordinaten* von p . Eine *projektive Varietät* in \mathbb{P}^n

ist definiert als $V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n : f_i(a_0, \dots, a_n) = 0 \text{ für alle } i\}$, wobei $f_1, \dots, f_s \in K[x_0, \dots, x_n]$ *homogene* Polynome sind.

Weitere Begriffe und Notationen werden an geeigneter Stelle eingeführt.

1.1 Torische Ideale und Varietäten

Im Folgenden betrachten wir eine besondere Klasse von Idealen bzw. Varietäten, sog. *torische* Ideale bzw. Varietäten. Torische Varietäten, oft auch als torische Einbettungen bezeichnet, spielen eine große Rolle im Zusammenspiel von Geometrie, Algebra und Kombinatorik. Die Anfänge der Theorie stammen aus den 1970er Jahren. Zu bemerken ist, dass anfangs nur *normale* torische Varietäten betrachtet wurden. An diesen Varietäten kann man viele allgemeine Konzepte der algebraischen Geometrie testen (z.B. Auflösung von Singularitäten, Cohomologietheorien, Hodge-Theorie, Schnitttheorie,...). Außerdem ist bei normalen torischen Varietäten die Verbindung zur konvexen Geometrie bzw. Kombinatorik (über Kegel und Fächer) besonders schön zu beschreiben. Daher befassen sich die meisten Einführungen in torische Geometrie nur mit diesen Varietäten. Die ‘‘Klassiker’’ auf diesem Gebiet sind [Br], [Fu], [KKMS] und [Od1]. Nichtnormale torische Varietäten wurden erstmals via torische Ideale von Gel’fand, Kapranov und Zelevinsky [GKZ] im Zusammenhang mit hypergeometrischen Funktionen untersucht. Auch in der Theorie der Gröbner Basen, z.B. in [St], tritt diese Klasse von Idealen auf.

Wir werden hier zuerst möglichst allgemein torische Varietäten über torische Ideale definieren. Dann werden wir die Definition von normalen torischen Varietäten als Kompaktifizierung des algebraischen Torus liefern und auf die Charakterisierung durch Kegel und Fächer eingehen. Schließlich möchten wir noch einige Unterschiede zwischen den ‘‘klassischen’’ torischen Varietäten und den ‘‘nicht notwendig normalen’’ torischen Varietäten erläutern.

Definition. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $K[t_1, \dots, t_d]$ der Polynomring in d Variablen über K . Dann heißen die Elemente von

$$K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] := K[t_1, \dots, t_d, t_1^{-1}, \dots, t_d^{-1}]$$

Laurentpolynome. Laurentpolynome der Form

$$\lambda \cdot \mathbf{t}^{\mathbf{a}} = \lambda t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d}, \text{ für } \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, \lambda \in K^*$$

nennt man *Laurentmonome*.

Im Folgenden betrachten wir normierte Laurentmonome (d.h., $\lambda = 1$). Diese Monome bilden eine multiplikative Gruppe in $K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$. Außerdem gilt: Die Abbildung

$$\theta : \mathbb{Z}^n \longrightarrow K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}], \mathbf{a} \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}}$$

liefert einen Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe \mathbb{Z}^n und der multiplikativen Gruppe der normierten Laurentmonome. Dieser Isomorphismus wird uns zur Definition einer sog. torischen Varietät führen.

Definition. Sei $f = \sum_{\mathbf{a}} \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ ein Laurentpolynom. Dann heißt

$$\text{supp}(f) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n : \lambda_{\mathbf{a}} \neq 0\}$$

der Träger von f . Es gilt

$$\operatorname{supp}(f \pm g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g) \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(fg) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$$

für Laurentpolynome $f, g \in K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$. Weiters ist $\operatorname{supp}(1) = \{0\}$. Wir nennen einen Ring R eine *monomiale Algebra*, wenn R eine K -Algebra ist, die von Laurentmonomen erzeugt wird.

Mit obigem Isomorphismus erhalten wir insgesamt: wenn R eine monomiale Algebra ist, dann ist die Menge $\bigcup_{f \in R} \operatorname{supp}(f)$ ein Untermonoid von \mathbb{Z}^n . Wir werden nun eine besondere Klasse von Idealen im Polynomring $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ studieren.

Wir betrachten eine Teilmenge $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ von \mathbb{Z}^d , mit $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{id}) \in \mathbb{Z}^d$ und nennen \mathcal{A} eine *Vektorkonfiguration*. Jeder Vektor \mathbf{a}_i wird identifiziert mit einem Monom $\mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$ im Ring der Laurentpolynome $K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$. Sei π der folgende Monoidhomomorphismus

$$\pi : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^d, \mathbf{b} \mapsto b_1 \mathbf{a}_1 + \dots + b_n \mathbf{a}_n.$$

Das Bild von \mathcal{A} unter π ist das Monoid

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \{b_1 \mathbf{a}_1 + \dots + b_n \mathbf{a}_n : b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir werden dafür auch $\mathbb{N}\mathcal{A} = {}_{\mathbb{N}}\langle \mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A} \rangle$ schreiben. Dann können wir diese Abbildung zu einem Homomorphismus von monomialen Algebren liften:

$$\hat{\pi} : K[\mathbf{x}] \longrightarrow K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}], x_i \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}.$$

Definition. Bezeichne $I_{\mathcal{A}}$ den Kern von $\hat{\pi}$. Wir nennen das Ideal $I_{\mathcal{A}}$ das *torische Ideal* von \mathcal{A} .

Aus der Definition von $I_{\mathcal{A}}$ folgt sofort, dass $I_{\mathcal{A}}$ ein Primideal ist, denn: falls $fg \in \ker(\hat{\pi})$, so gilt $\hat{\pi}(fg)(x_1, \dots, x_n) = fg(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}) = 0$. Dann muss aber entweder $f(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n})$ oder $g(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n})$ gleich 0 sein, also f oder $g \in \ker(\hat{\pi})$ gelten.

Daher ist die Verschwindungsmenge $V(I_{\mathcal{A}})$ eine affine, irreduzible Varietät in \mathbb{A}_{K^n} . $V(I_{\mathcal{A}})$ ist der Zariski-Abschluss der Menge $\{(\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}) : \mathbf{t} \in (K^*)^d\}$. Dabei ist K^* die (multiplikative) Einheitengruppe von K , d.h., $K^* := K \setminus \{0\}$. Die Gruppe $(K^*)^d$ heißt der (*d-dimensionale algebraische*) *Torus*.

Definition. Eine Varietät der Form $X := V(I_{\mathcal{A}})$ heißt *affine torische Varietät*. (Wenn wir \mathcal{A} spezifizieren wollen, schreiben wir genauer $X_{\mathcal{A}}$). Sei nun $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}\}$. Wenn das zugehörige torische Ideal $I_{\mathcal{A}}$ homogen (bzgl. der Standardgraduierung mit $\deg(x_i) = 1$ für alle i) ist, so heißt $V(I_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathbb{P}^n$ eine *projektive torische Varietät*.

Bemerkung. Oben taucht zum ersten Mal der algebraische Torus auf. Wir sehen, dass eine torische Varietät den algebraischen Torus als Zariski-offene, dichte Teilmenge enthält. Das ist auch der Grund, warum torische Varietäten *torisch* heißen!

Eine Besonderheit von torischen Varietäten ist, dass sie durch Monome parametrisiert werden. Das zugehörige torische Ideal wird hingegen von Binomen erzeugt. Im folgenden Satz präzisieren wir diese Aussage und geben ein unendliches Erzeugendensystem von $I_{\mathcal{A}}$ an.

Satz 1. Sei $I_{\mathcal{A}}$ ein torisches Ideal in $K[\mathbf{x}]$. Wir können $I_{\mathcal{A}}$ als K -Vektorraum auffassen. Dann wird $I_{\mathcal{A}}$ von der Menge

$$\{\mathbf{x}^{\mathbf{u}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^n \text{ und } \pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v})\}$$

erzeugt.

Beweis. Siehe [St, ch. 4, Lemma 4.1]. □

Wir können auch die (Krull-)Dimension einer affinen torischen Varietät $V(I_{\mathcal{A}})$ angeben. Sei dazu A die $d \times n$ Matrix, deren Spalten die Elemente von \mathcal{A} bilden. Sei weiters $\dim(\mathcal{A}) := \text{Rang}(A)$. Dann gilt:

Satz 2. Die Krulldimension des Rings $K[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}}$ ist gleich $\dim(\mathcal{A})$.

Beweis. Findet sich in [St, ch. 4, Lemma 4.2]. □

Wir geben nun noch eine kompaktere Form des Erzeugendensystems von $I_{\mathcal{A}}$ an: Sei $\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n \mid A\mathbf{b} = \mathbf{0}\}$, der Kern von A . Wir können jeden Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ eindeutig schreiben als $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-$, mit $\mathbf{b}^+, \mathbf{b}^- \in \mathbb{N}^n$, und zwar

$$(\mathbf{b}^+)_j = \begin{cases} b_j & \text{falls } b_j \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(\mathbf{b}^-)_j = \begin{cases} -b_j & \text{falls } b_j \leq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel. Falls $\mathbf{b} = (5, -2, 1, 0, 11, -7, 0)$ ist, dann gilt $\mathbf{b}^+ = (5, 0, 1, 0, 11, 0, 0)$ und $\mathbf{b}^- = (0, 2, 0, 0, 0, 7, 0)$.

Somit gilt $\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \ker(\pi)$, wobei $\ker(\pi)$ das Untergitter von \mathbb{Z}^n ist, das von allen Vektoren \mathbf{b} mit $\pi(\mathbf{b}^+) = \pi(\mathbf{b}^-)$ erzeugt wird. D.h., es gilt

$$I_{\mathcal{A}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-} : \mathbf{b} \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)) \text{ in } k[x_1, \dots, x_n].$$

$I_{\mathcal{A}}$ wird von Binomen f_1, \dots, f_s erzeugt. Dann ist $X = V(I_{\mathcal{A}})$ eine affine torische Varietät. Der Koordinatenring von X ist durch

$$k[X] = k[\mathbf{t}^{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathcal{A}] = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_s)$$

gegeben, wobei $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d)$. Sei B eine $n \times (n-d)$ Matrix, deren Spalten eine Basis aller linearen Relationen zwischen den \mathbf{a}_i 's erzeugen, d.h., es gilt

$$AB = 0.$$

Wir können annehmen, dass $B \in \mathbb{Z}^{n \times (n-d)}$ ist, daher erfüllt jede Spalte \mathbf{b}_i von B die Gleichung

$$\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}_i^-} = 0.$$

Wir können somit X kompakt als $\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i} = 1, i = 1, \dots, n-d$ schreiben.

Beispiel 1. Sei

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Z}^2.$$

Die affine torische Varietät $X = V(I_{\mathcal{A}})$ lebt dann im \mathbb{A}^3 und hat Dimension $\dim(A) = 2$. Zunächst können wir X durch ihren Koordinatenring $K[X] = K[st^{-1}, s, t^2]$ beschreiben (dabei wähle Koordinaten $s := t_1$ und $t := t_2$). Weiters interessiert uns das Ideal $I_{\mathcal{A}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-} \mid \mathbf{b} \in \ker_{\mathbb{Z}}(A))$. Mit Hilfe von Gröbner-Basis Methoden kann man einfach ein Erzeugendensystem von $I_{\mathcal{A}}$ finden, siehe z.B. [St, ch. 12, Algorithm 12.6]. In unserem Fall ist $\ker_{\mathbb{Z}}(A)$ das Erzeugnis von $\mathbf{b} = (2, -2, 1)^T$, d.h., $I_{\mathcal{A}} = (x^2z - y^2)$ in $K[x, y, z]$ (wir wählen wieder Koordinaten $x := x_1, y := x_2, z := x_3$ für den Koordinatenring von \mathbb{A}^3). Dann ist $V(I_{\mathcal{A}})$ eine irreduzible affine torische Varietät, nämlich der wohlbekannte *Whitney-Regenschirm*.

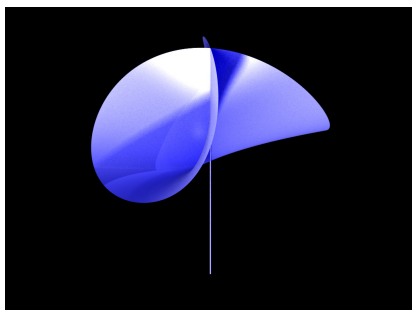


Abb. 1: Der Whitney-Regenschirm, visualisiert in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$.

Bemerkung. Im obigen Beispiel kommt eine nicht normale affine torische Varietät X vor! Dass $k[st^{-1}, s, t^2]$ nicht normal ist, sieht man am besten, indem man sich den singulären Ort von X ausrechnet. $\text{Sing}(X)$ ist die gesamte z -Achse. Dies impliziert $\dim(\text{Sing}(X)) = 1$. Wäre X normal, so müsste $\text{codim}_X(\text{Sing}(X)) \leq 2$ gelten (siehe dazu [Mu]).

1.2 Normale torische Varietäten

Kegel

In diesem Kapitel sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Wir betrachten nun die “klassischen” torischen Varietäten. Bisher haben wir eine torische Varietät als eine affine oder projektive Varietät, die durch Monome parametrisiert wird, eingeführt. Meistens wird in der algebraischen Geometrie jedoch eine andere Definition verwendet: X heißt *torische Varietät*, wenn X *normal* ist und X einen algebraischen Torus $T \cong (K^*)^d$ als Zariski-offene, dichte Teilmenge enthält, zusammen mit einer Gruppenoperation $T \times X \rightarrow X$ von T auf X , die die natürliche Gruppenoperation $T \times T \rightarrow T$ erweitert.

Zunächst betrachten wir einige

Beispiele. (1) Der Torus $(K^*)^n \subseteq \mathbb{A}_K^n$ ist eine affine torische Varietät: die Abbildung $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, \frac{1}{t_1 \cdots t_n})$ liefert

$$(K^*)^n \cong V(x_1 \cdots x_n x_{n+1} - 1) \text{ in } \mathbb{A}_K^{n+1}.$$

(2) Klarerweise ist \mathbb{A}^n eine normale torische Varietät. Man kann weiters zeigen, dass \mathbb{P}^n den n -dimensionalen Torus enthält.

(3) Sei $X = V(xy - zw) \subseteq \mathbb{A}^4$. X ist normal und enthält den Torus $(K^*)^3$ via

$$(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}).$$

Der einzige Unterschied zu vorher ist also die Zusatzbedingung der *Normalität*:

Definition. Sei X eine Varietät und $a \in X$. Sei weiters $\mathcal{O}_a = K[X]_{\mathfrak{m}_a}$ der lokale Ring von a . Der Punkt a heißt *normaler Punkt* von X , wenn der Ring \mathcal{O}_a ganz abgeschlossen im Quotientenkörper $K(X)$ ist. X heißt *normale Varietät*, wenn jeder Punkt von X normal ist.

Diese Definition ist nicht besonders hilfreich. Man kann überhaupt nicht erkennen, was Normalität für unsere torischen Varietäten bedeutet. Wir werden nun diese Beziehung etwas aufklären.

Im Folgenden sei X eine normale torische Varietät (affin oder projektiv), und in den affinen (oder projektiven) Raum eingebettet. X ist durch ein Ideal $I_{\mathcal{A}}$ definiert, wobei allerdings \mathcal{A} einer speziellen Klasse von Vektorkonfigurationen zuzuordnen ist. Wir wollen diese Vektorkonfigurationen nun möglichst gut beschreiben. Hier kommt die schon angesprochene konvexe Geometrie in Gestalt von Kegeln und Fächern zum Vorschein.

Bemerkung. Wir werden später bei Explosionen von Monomidealen noch einmal Kegel benötigen, dann allerdings eine andere Notation verwenden. In diesem Kapitel halten wir uns an die Standardnotationen, wie z.B. in [Ew], [Fu], [Od1].

Eine normale torische Varietät kann durch ein *Gitter* N und einen Kegel (bzw. im allgemeinen Fall einen Fächer) konstruiert werden. Wir fixieren zuerst ein Gitter $N \cong \mathbb{Z}^d$ und das zugehörige duale Gitter $M := \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = N^\vee$. Sei $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ein reeller Vektorraum isomorph zu \mathbb{R}^d .

Definition. Ein *rationaler polyedrischer Kegel* σ in $N_{\mathbb{R}}$ ist ein Kegel, der von endlich vielen Elementen von N erzeugt wird:

$$\sigma := \{\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_l \mathbf{u}_l \in N_{\mathbb{R}} : \lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0\},$$

wobei alle $\mathbf{u}_i \in N$ sind. Dann heißt σ *spitz*, wenn $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$. Die *Dimension* von σ ist die Dimension des kleinsten Unterraums von $N_{\mathbb{R}}$, der σ enthält.

Für einen spitzen rationalen polyedrischen Kegel heißt

$$\sigma^\vee := \{\mathbf{u} \in M_{\mathbb{R}} : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in \sigma\}$$

der *duale Kegel*. Dabei bezeichnet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ das Standardskalarprodukt von zwei Vektoren \mathbf{v}, \mathbf{w} in $M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^d$. Wenn σ von Dimension d ist, so ist σ^\vee ebenfalls ein d -dimensionaler rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Eine Menge $\tau \subseteq \sigma$ heißt *Seite* von σ , wenn

$$\tau = \sigma \cap \mathbf{u}^\perp := \{\mathbf{v} \in \sigma : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$$

für ein \mathbf{u} in σ^\vee ist.

Die Hauptidee ist nun, das Monoid

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M = \{\mathbf{u} \in M : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ für alle } \mathbf{v} \in \sigma\}$$

zu betrachten. Ein Punkt $\mathbf{u} \in \sigma^\vee \cap M \cong \mathbb{Z}^d$ heißt *Gitterpunkt* von σ^\vee . Jeder Gitterpunkt \mathbf{u} definiert dann ein Laurentmonom $\mathbf{t}^{\mathbf{u}}$. Die zugehörige torische Varietät X_σ sollte dann die kleinste Varietät sein, auf der diese Laurentmonome überall definiert sind.

Wir können X_σ konstruieren, indem wir verwenden, dass S_σ und damit auch die Monoidalgebra $K[S_\sigma]$, endlich erzeugt ist. Dies folgt aus dem folgenden Satz.

Satz 3 (Gordan's Lemma). *Wenn σ ein rationaler polyedrischer Kegel ist, dann ist $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ endlich erzeugt. In anderen Worten: es existieren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$ in S_σ , sodass jedes Element aus S_σ von der Form*

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_l \mathbf{u}_l, \lambda_i \in \mathbb{N}$$

ist.

Beweis. Siehe zum Beispiel [Fu, ch.1, 2, prop. 1]. □

Man kann weiters zeigen, dass für spitze rationale polyedrische Kegel σ^\vee das Monoid S_σ ein eindeutiges minimales endliches Erzeugendensystem $\mathcal{A} \subseteq M \cong \mathbb{Z}^d$ besitzt. Man nennt \mathcal{A} die *Hilbert Basis* von S_σ . Man kann \mathcal{A} mit Hilfe von Gröbner Basis Methoden berechnen, siehe [St, ch.13, Algorithm 13.2].

Die Erzeuger $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$ bestimmen die affine Varietät $X_\sigma \subseteq \mathbb{A}_K^l$. Betrachte dazu die Abbildung

$$\varphi : (K^*)^n \rightarrow K^l = \mathbb{A}^l, (t_1, \dots, t_n) \mapsto (\mathbf{t}^{\mathbf{u}_1}(t_1, \dots, t_n), \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{u}_l}(t_1, \dots, t_n)).$$

Dann ist X_σ der Zariski-Abschluss von $\text{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{A}^l$. X_σ ist eine normale affine torische Varietät.

Bemerkung. Die "koordinatenfreie" High-Tech Definition lautet kurz und bündig $X_\sigma := \text{Spec}(K[S_\sigma])$. Dabei ist $\text{Spec}(K[S_\sigma]) = \{\mathfrak{p} \subseteq K[S_\sigma] : \mathfrak{p} \text{ prim}\}$ mit der Zariski Topologie versehen.

Man kann zeigen, dass umgekehrt jede normale affine torische Varietät isomorph zu X_σ für einen Kegel σ ist. Siehe etwa in [Ew, Part 2, VI, Thm 2.11].

Wir haben bis jetzt mit $X_{\mathcal{A}}$ die Verschwindungsmenge eines beliebigen torischen Ideals bezeichnet. Für normale affine torische Varietäten gilt allerdings:

Satz 4. *Sei \mathcal{A} eine endliche Teilmenge von \mathbb{Z}^d . Dann sind äquivalent:*

- (1) *Die affine torische Varietät $X_{\mathcal{A}}$ ist normal.*
- (2) *Die affine torische Varietät $X_{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu X_σ für einen rationalen Kegel σ in \mathbb{R}^d .*
- (3) *Der Integritätsbereich $K[\mathcal{A}] = K[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}}$ ist ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.*
- (4) *Das Monoid $\mathbb{N}\mathcal{A}$ ist normal, d.h., $\mathbb{N}\mathcal{A} = \mathbb{Z}\mathcal{A} \cap_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \langle \mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A} \rangle$.*

Beweis. Siehe [St, ch. 13, prop. 13.5]. □

Dieser Satz besagt, dass eine affine torische Varietät X_σ genau dann normal ist, wenn man *alle* Gitterpunkte im dualen Kegel σ^\vee als \mathbb{N} -Linearkombinationen der Erzeuger darstellen kann.

Beispiele. (1) Wir arbeiten der Einfachheit halber in $M = N = \mathbb{Z}^2$. Seien

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten σ^\vee , indem wir die inneren Normalen der \mathbf{u}_i berechnen und dann die fehlenden Gitterpunkte dazunehmen (siehe Abb. 2). Dann sind die Erzeuger von $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ die drei Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Abb. 2: Der Kegel σ (links) und σ^\vee .

Wir setzen $\mathcal{A} := \{\mathbf{a}_i : i = 1, \dots, 3\}$. Dann ist $X_\sigma = X_{\mathcal{A}}$ der Doppelkegel $V(x^2 - yz)$ im \mathbb{A}^3 . X_σ ist normal und hat eine Singularität im Nullpunkt. Ein Bild von X_σ in \mathbb{A}^3 findet sich in Beispiel 3.

(2) Wir betrachten nun wieder den Whitney-Regenschirm $V(y^2 - x^2z)$ im \mathbb{A}^3 . Wir haben oben schon das zugehörige \mathcal{A} bestimmt, also ist

$$\sigma^\vee = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

Allerdings sind nicht alle Gitterpunkte von $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$ positive ganzzahlige Linearkombinationen dieser Erzeuger, z.B. $(0, 1)^T$. Daher sehen wir ganz leicht, dass der Whitney-Regenschirm nicht normal ist.

(3) Die Varietät $X = V(xy - zw)$ in \mathbb{A}^4 besitzt den Koordinatenring $K[s, t, u, stu^{-1}]$. Daher sind die Erzeuger von σ^\vee die vier Vektoren $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)^T$ und $\mathbf{a}_4 = (1, 1, -1)^T$. Wir sehen, dass X normal ist und nur der Nullpunkt singulär ist.

Fächer

Wir können allgemeinere normale torische Varietäten konstruieren, indem wir affine torische Varietäten, die denselben Torus $(K^*)^n$ enthalten, zusammenkleben. Dies geschieht über sog. Fächer.

Definition. Ein *Fächer* Σ in $N \cong \mathbb{Z}^d$ ist eine endliche Menge von rationalen spitzen polyedrischen Kegeln $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$, sodass gilt

- (1) wenn $\sigma \in \Sigma$ und τ eine Seite von σ ist, so ist auch $\tau \in \Sigma$,
- (2) wenn $\sigma, \tau \in \Sigma$, dann ist $\sigma \cap \tau$ eine Seite von beiden.

Somit erhält man aus jedem Kegel $\sigma \in \Sigma$ eine affine torische Varietät X_σ . Falls τ eine Seite von σ ist, so kann man X_τ als Zariski-offene Teilmenge von X_σ auffassen. Somit kann man eine abstrakte torische Varietät definieren:

Definition. Sei Σ ein Fächer in $N_{\mathbb{R}}$. X_{Σ} ist die Varietät, die man aus den affinen Varietäten X_{σ} , $\sigma \in \Sigma$, erhält, indem man für alle $\sigma, \tau \in \Sigma$ die Varietäten X_{σ} und X_{τ} entlang ihrer gemeinsamen Teilmengen $X_{\sigma \cap \tau}$ zusammenklebt.

Die Inklusionen von $(K^*)^n \subseteq X_{\sigma}$ sind kompatibel mit den Identifikationen, die man bei der Konstruktion von X_{Σ} vorgenommen hat. Daher enthält X_{Σ} den Torus $(K^*)^n$ als Zariski-offene Teilmenge. Von vorneherein ist X_{Σ} nicht in den projektiven Raum eingebettet. Es gibt sogar X_{Σ} , die weder affin noch projektiv sind.

Man kann allerdings zeigen, dass X_{Σ} eine normale torische Varietät ist und dass alle normalen torischen Varietäten über einen Fächer bestimmt sind [Od2, Thm. 4.1].

Wir werden noch zwei Spezialfälle von Σ betrachten:

(1) Sei σ ein Kegel in N und Σ bestehe aus σ zusammen mit all seinen Seiten. Dann ist Σ ein Fächer und X_{Σ} ist die normale affine torische Varietät X_{σ} . Dies ist das einzig mögliche Beispiel einer normalen torischen Varietät X_{Σ} , die affin ist.

(2) Wenn Σ der innere oder äußere Normalenfächer eines rationalen Polytops P in $M_{\mathbb{R}}$ ist (d.h., alle Ecken von P liegen in $M_{\mathbb{Q}}$), dann ist X_{Σ} eine normale projektive torische Varietät. Die Umkehrung dieser Behauptung stimmt ebenso, siehe dazu [Od1, ch. 2, 4] oder [Fu, ch. 1, 5].

Schließlich kann man aus einem Fächer Σ weitere Fächer durch Verfeinerung gewinnen: Σ' heißt *Verfeinerung* von Σ , wenn jeder Kegel von Σ eine Vereinigung von Kegeln in Σ' ist. Insbesondere kann man durch die Methode der *stellaren Unterteilung* von Fächern Singularitäten auflösen. Darauf wird hier nicht näher eingegangen, Details dazu finden sich z.B. in [KKMS] und [Fu]. Wir werden zum Abschluss noch zwei Beispiele von torischen Varietäten X_{Σ} betrachten.

Beispiel 2. Sei wieder $N = M = \mathbb{Z}^n$ und $M_{\mathbb{R}}$ bzw. $N_{\mathbb{R}}$ seien \mathbb{R}^n .

(1) Für $n = 1$ gibt es nur einen nicht affinen Fächer Σ . Er besteht aus den Kegeln $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $\sigma_3 = \{0\}$. Diese entsprechen den affinen torischen Varietäten $X_{\sigma_1} \cong \mathbb{A}_K^1$, $X_{\sigma_2} \cong \mathbb{A}_K^1$ und $X_{\sigma_3} \cong K^*$ mit Koordinatenringen $K[t]$, $K[t^{-1}]$ bzw. $K[t, t^{-1}]$. Wir kleben σ_1 und σ_2 mit dem Isomorphismus $t \mapsto t^{-1}$ auf der gemeinsamen Seite σ_3 zusammen. Dies ist die klassische Konstruktion der projektiven Geraden. Es gilt also $X_{\Sigma} = \mathbb{P}^1$.

(2) Seien $\sigma_1 = \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ und $\sigma_2 = \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ zwei Kegel in \mathbb{Z}^2 . Dann sind $X_{\sigma_1} = \text{Spec}(K[x, x^{-1}y])$ und $X_{\sigma_2} = \text{Spec}(K[y, xy^{-1}])$. Die zugehörige torische Varietät $X_{\Sigma'}$ entspricht der Explosion von \mathbb{A}_K^2 im Nullpunkt mit den affinen Karten X_{σ_1} und X_{σ_2} . Der Fächer Σ' besteht aus $\sigma_1, \sigma_2, \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir sehen, dass Σ' eine Verfeinerung von

$$\Sigma = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}, \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}, \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist. X_{Σ} ist isomorph zu \mathbb{A}_K^2 .

Kapitel 2

Auflösung von Singularitäten

Wir wollen im Folgenden die Singularitäten einer torischen Varietät X im \mathbb{A}^n auflösen. Auflösung bedeutet dabei im Wesentlichen, dass man eine Abbildung $\pi : X' \rightarrow X$ angibt, unter der X das Bild einer Mannigfaltigkeit X' ist. X' soll also X parametrisieren. Wir werden später eine präzise Definition von Auflösung geben.

Wir wollen hier einen konstruktiven Beweis der Auflösung von Singularitäten einer affinen torischen Hyperfläche durch eine Folge von speziellen birationalen Transformationen, *Explosionen* angeben. Die Hauptidee bei dieser Herangehensweise ist, eine lokale Invariante der Singularität anzugeben, die zum einen das *Zentrum* der nächsten Explosion angibt und zum anderen eine Verbesserung der Singularität misst. Man vergleicht die Invariante der ursprünglichen Varietät X mit der Invariante der transformierten Varietät X' , um diese Verbesserung festzustellen.

Die klassische Theorie der Auflösung von Singularitäten wurde von Zariski, Abhyankar, Hironaka und anderen Mathematikern im 20. Jahrhundert entwickelt. So bewies Hironaka [Hi] die Existenz der Auflösung durch Explosionen für Körper der Charakteristik 0. Später wurden auch konstruktive Beweise angegeben.

Wir werden hier zuerst allgemein Explosionen des \mathbb{A}^n betrachten, da wir diese Abbildungen auch später (im Kapitel über Explosionen in Monomidealen) benötigen. Dann werden wir einen Algorithmus angeben, wie man durch eine Folge von speziellen Explosionen eine torische Hyperfläche $X = V(f)$, wobei f ein Binom aus $K[x_1, \dots, x_n]$ ist, auflösen kann. Wir werden auch auf die Relation des Koordinatenrings von X (wird von Monomen erzeugt) zur definierenden Gleichung von X (ein Binom) eingehen. Im Algorithmus werden wir eine Invariante von X konstruieren, die Verbesserungen der Singularitäten von X messen soll. Wir gehen dabei ähnlich wie Bierstone und Milman [BM] vor und werden auch kurz deren Invariante beschreiben.

Dies führt uns dann direkt zum nächsten Kapitel. Dort werden wir unter anderem *Symmetrien* und *äquivariante Auflösung* behandeln.

2.1 Explosionen

Die Haupttechnik beim Auflösen von Singularitäten sind spezielle birationale Transformationen, *Explosionen*. In der Literatur haben diese Abbildungen viele Namen, unter anderem *Blow Ups*, *Aufblasungen*, *monoideale Transformationen*, *σ -Prozesse*. Wir werden im Folgenden immer den Begriff “Explosionen” verwenden. Die Vielfalt an

Namen lässt auch die verschiedenen Zugänge erahnen. Wir werden uns auf die klassische Definition und die Konstruktion als Rees-Algebra beschränken. Allgemeines zu Explosionen kann man am besten in [Ha3], [EH] und [Hi] nachlesen. In [Hs] werden Explosionen abstrakter besprochen, für Beispiele siehe etwa [Ha1].

Explosionen tauchen auch im Kontext von Kompaktifizierungsproblemen, etwa bei der Konstruktion von *Arrangement Models* in [DP] oder bei der Kompaktifizierung von Konfigurationenräumen in [FM] auf. Wir werden darauf später eingehen.

Der affine Raum \mathbb{A}^n

Wir werden Explosionen im \mathbb{A}^n betrachten. Bis jetzt ist der affine n -dimensionale Raum über einem Körper K als Menge aller n -Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ bzw. als topologischer Raum mit der Zariski-Topologie definiert. Wir werden im Folgenden jedoch \mathbb{A}_K^n mit verschiedenen Strukturen versehen betrachten: als Schema bzw. als K -Vektorraum K^n . Wenn man lineare Unterräume von \mathbb{A}^n betrachtet, möchte man sie manchmal als Schemata und manchmal als Vektorräume studieren. Um nicht durcheinanderzukommen werden wir nun zuerst \mathbb{A}^n als Schema definieren (siehe dazu [Hs, Mu, EH]) und dann zeigen, wie man jedem K -Vektorraum V kanonisch ein Schema, dessen abgeschlossene Punkte genau V bilden und das isomorph zu \mathbb{A}^n ist, zuordnen kann. Durch diese Prozedur kann man die Menge der linearen Unterräume von K^n mit den linearen Unterschemata von \mathbb{A}^n identifizieren. Man bettet also den Vektorraum K^n *koordinateninvariant* in das Schema \mathbb{A}_K^n ein.

Definition. Sei $K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n -Variablen. Wir nennen das Schema

$$\mathbb{A}_K^n := \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_n])$$

den n -dimensionalen affinen Raum über dem Körper K . (Wie vorher werden wir meistens nur \mathbb{A}^n schreiben.)

Sei nun V ein K -Vektorraum. Sei R_V der Ring der polynomialen Funktionen $f : V \rightarrow K$. Definiere

$$V^{sch} = \text{Spec}(R_V).$$

Somit “entspricht” die Menge der abgeschlossenen Punkte von V^{sch} dem Vektorraum V . Denn nach dem Hilbert’schen Nullstellensatz ist jedes maximale Ideal \mathfrak{m}_λ von R_V der Kern eines Homomorphismus

$$R_V \rightarrow K : f \mapsto f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

für ein $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$. Durch $\lambda \rightarrow [\mathfrak{m}_\lambda]$ wird K^n isomorph auf alle abgeschlossenen Punkte $[\mathfrak{m}_\lambda]$ von V^{sch} abgebildet.

Die Explosion von \mathbb{A}^n

Nach einem Beispiel werden wir zur ersten (klassischen) Definition einer Explosion von \mathbb{A}^n kommen.

Beispiel 3. Zur Motivation beginnen wir mit der Auflösung einer algebraischen Fläche X im \mathbb{A}^3 . Man sucht also eine Abbildung $\pi : X' \rightarrow X$, wobei X' eine Mannigfaltigkeit sein soll, die X parametrisiert. Sei $X = V(f)$ mit $f = xy - z^2$. Dann ist X der schon bekannte Doppelkegel im \mathbb{A}^3 , mit Singularität im Nullpunkt. Sei

$\pi : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3, (x, y, z) \mapsto (x, xy, xz)$. Diese Abbildung lässt die yz -Ebene, definiert durch $V(z)$, auf den Nullpunkt des \mathbb{A}^3 zusammenschrumpfen. Aus unserem Kegel wird $X' = V(y - z^2)$, ein Paraboloid im \mathbb{A}^3 , welches glatt ist.

Wir hätten jedoch auch $\pi : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3, (x, y, z) \mapsto (xy, y, yz)$, wählen können. Durch diese Abbildung wird die xz -Ebene zum Nullpunkt kontrahiert. Aus dem Kegel wird diesmal $X' = V(x - z^2)$, wiederum ein Paraboloid im \mathbb{A}^3 . Schließlich liefert die dritte Wahl von $\pi : \mathbb{A}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3, (x, y, z) \mapsto (xz, yz, z)$, das Hyperboloid $X' = V(xy - 1)$ im \mathbb{A}^3 . Die Singularität ist durch alle drei Abbildungen π aufgelöst. Die Frage ist nun, wie man die Abbildung $\pi : X' \rightarrow X$ allgemein beschreiben kann, d.h., wie man ein Verfahren angeben kann, die Mannigfaltigkeit X' und die Abbildung π allein aus X zu rekonstruieren.

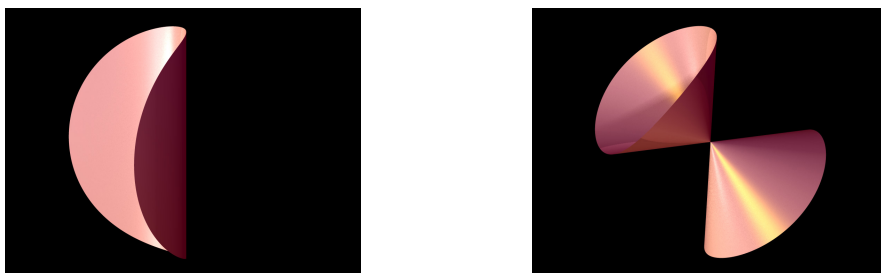


Abb. 3: Durch π wird das Paraboloid auf den Doppelkegel abgebildet.

Definition. Sei P ein Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$ und sei Z die Untervarietät $V(P)$ von \mathbb{A}^n . Wähle Erzeuger g_1, \dots, g_k von P und betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n \setminus Z &\rightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{k-1}, \\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}) : \dots : g_k(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und injektiv. Ihr Bild ist der Graph $\Gamma(\sigma)$ der Abbildung $\sigma : \mathbb{A}^n \setminus Z \rightarrow \mathbb{P}^{k-1}, \mathbf{x} \mapsto (g_1(\mathbf{x}) : \dots : g_k(\mathbf{x}))$. Wir nennen den Zariski-Abschluss $\tilde{\mathbb{A}}^n$ von $\Gamma(\sigma)$ in $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ die *Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum Z* (bzw. mit Zentrum P). $\tilde{\mathbb{A}}^n$ ist unabhängig von der Wahl der Erzeuger von P . Die Restriktion der Projektion auf den ersten Faktor $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ heißt die *assozierte Explosionsabbildung*. π ist ein birationaler Morphismus, der ein Isomorphismus auf $\mathbb{A}^n \setminus Z$ ist, d.h., $\tilde{\mathbb{A}}^n \setminus \pi^{-1}(Z) \cong \mathbb{A}^n \setminus Z$. Die Untervarietät $E := \pi^{-1}(Z)$ von $\tilde{\mathbb{A}}^n$ heißt der *exzeptionelle Divisor E* der Explosion. E ist eine Hyperfläche und wird unter π zu Z kontrahiert.

Aus dieser Definition kann man die algebraischen Gleichungen, die $\tilde{\mathbb{A}}^n$ in $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ definieren, sofort ablesen. Ebenso können wir die sog. *affinen Kartenausdrücke* von π direkt ableiten. Es gilt: $\tilde{\mathbb{A}}^n$ wird in $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$ durch die projektiven Gleichungen

$$u_i g_j(\mathbf{x}) - u_j g_i(\mathbf{x}) = 0, \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq k,$$

bestimmt, wobei u_1, \dots, u_k projektive Koordinaten auf \mathbb{P}^{k-1} sind. Somit wird $\tilde{\mathbb{A}}^n$ von affinen Karten U_j überdeckt, wobei jeweils $g_j(\mathbf{x}) \neq 0$ in U_j ist. Damit erhalten wir für U_j den Kartenausdruck von σ :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \left(\frac{g_1(\mathbf{x})}{g_j(\mathbf{x})} : \dots : 1 : \dots : \frac{g_k(\mathbf{x})}{g_j(\mathbf{x})} \right).$$

Es gibt also für jeden Erzeuger von P genau eine affine Karte.

Für eine Untervarietät X des \mathbb{A}^n und $Z \subseteq X$, erhalten wir analog \tilde{X} als Zariski-Abschluss des Bildes von

$$\begin{aligned} X \setminus Z &\rightarrow X \times \mathbb{P}^{k-1}, \\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}) : \dots : g_k(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Wir nennen \tilde{X} die *Explosion von X mit Zentrum Z* . Die Abbildung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt wieder die *assoziierte Explosionsabbildung*. Weiters heißt $X^* := \pi^{-1}(X)$ die *total Transformierte* von X und $X' := \pi^{-1}(X \setminus Z)$ die *strikt Transformierte* von X .

Wir geben noch eine weitere Konstruktion der Explosion des \mathbb{A}^n an, mit deren Hilfe man leicht die Koordinatenringe der affinen Karten, die \mathbb{A}^n überdecken, berechnen kann. Diese algebraische Konstruktion ist leicht auf allgemeinere Objekte (z.B. Schemata) zu verallgemeinern.

Definition. Sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann heißt die R -Algebra

$$S := R \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \dots \cong R[tI] \subseteq R[t]$$

die *Rees-Algebra von I in R* .

Speziell gilt also für $R = K[x_1, \dots, x_n]$ und das Ideal P : Die x_1, \dots, x_n sind K -Algebren-erzeuger von $K[x_1, \dots, x_n]$ und die g_1, \dots, g_k sind Erzeuger des Ideals P in $K[\mathbf{x}]$. Dann ist die Rees-Algebra S von P in $K[\mathbf{x}]$ das Bild des Ringes $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k]$ unter dem Homomorphismus $x_i \mapsto x_i$ und $y_j \mapsto g_j t$. Der Kern dieser Abbildung ist ein homogenes Ideal (in den Variablen y_j), das genau der Explosion von \mathbb{A}^n in P entspricht. Damit erhalten wir als Koordinatenring der j -ten Karte

$$K[x_1, \dots, x_n, g_1/g_j, \dots, g_k/g_j].$$

Bemerkung. Geometrisch bedeutet diese Konstruktion, den \mathbb{A}^n im Zentrum $Z = V(P)$ explodieren zu lassen. Schema-theoretisch können wir dann $\tilde{\mathbb{A}}^n = \text{Proj}(K[\mathbf{x}][tP])$ schreiben. Allgemeiner gilt für Schemata: Sei X ein Schema und $Z \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Sei $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{Z,X} \subseteq \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe von Z in X . Wenn \mathcal{A} die Garbe der graduierten \mathcal{O}_X -Algebren

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{I}^n = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}^2 \oplus \dots$$

ist, so ist das Schema $\text{Proj}(\mathcal{A}) \rightarrow X$ die Explosion von X entlang Z . Näheres dazu und der Beweis dieser Tatsache finden sich in [EH, IV, 2].

2.2 Auflösung

Es gibt verschiedene Definitionen der Auflösung von Singularitäten. Wir betrachten stets Varietäten, die in den \mathbb{A}^n eingebettet sind, daher verwenden die folgende, starke Version, vgl. etwa [Ha1]:

Eingebettete Auflösung von Singularitäten. Sei X eine Varietät über einem Körper K , eingebettet in eine glatte Varietät W . Gesucht ist eine glatte Varietät \widetilde{W} und ein eigentlicher birationaler Morphismus $\pi : \widetilde{W} \rightarrow W$, sodass die Inverse \widetilde{X} von X unter π nur normale Kreuzungssingularitäten besitzt und so, dass die Einschränkung von π auf die glatten Punkte von X ein Isomorphismus ist.

Zur Erklärung einiger Begriffe: Eine Varietät X hat *normale Kreuzungssingularitäten*, wenn X aus einer Vereinigung von glatten Komponenten besteht, die einander transversal schneiden. Genauer: In jedem Schnittpunkt existiert ein Koordinatensystem, durch das die Varietät lokal durch Monome definiert wird. Den *eigentlichen birationalen Morphismus* erhalten wir durch eine endliche Folge von Explosionen in geeignet gewählten Zentren. Wir werden stets $W = \mathbb{A}_K^n$ mit $\text{char}(K) = 0$ annehmen.

Wir werden eine Folge von Explosionen

$$\widetilde{X} = X^N \rightarrow \dots \rightarrow X^0 = X$$

konstruieren, mit Zentren Z^i abgeschlossene Untervarietäten von X^{i-1} , sodass die letzte strikt Transformierte X^N glatt ist und normale Kreuzungen mit dem exzeptionellen Divisor E^N besitzt. Solch eine Folge existiert in Körpern der Charakteristik 0, vgl. [Hi]. Dabei sind auch nichtreduzierte Zentren erlaubt (vgl. [Ha2,Ro]). Wir werden für eine affine torische Hyperfläche X die Zentren Z^i explizit angeben und eine Invariante $\mathcal{I} \in \mathbb{N}^4$ definieren. Weiters werden wir zeigen, dass diese Invariante unter jeder Explosion echt lexikographisch kleiner wird, d.h., dass X in endlich vielen Schritten aufgelöst ist.

2.3 Auflösung von torischen Hyperflächen im \mathbb{A}^n

Zur Erinnerung: Wir betrachten eine nicht notwendig normale affine torische singuläre Hyperfläche X , gegeben durch $V(f)$ in \mathbb{A}^n , wobei $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ in $K[x_1, \dots, x_n]$. X ist *aufgelöst*, wenn $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- \in \pm\mathbb{N}^n = \mathbb{N}^n \cup -\mathbb{N}^n$ ist. Zuerst betrachten wir den singulären Ort von X genauer. Dann geben wir an, wie die Gleichung von X unter Explosionen transformiert wird.

Wir könnten uns jedoch auch direkt in den Koordinatenring $K[X] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathcal{A}]$ platzieren, und untersuchen, wie sich die erzeugenden Monome unter Explosionen verhalten. Dazu benötigen wir das zugehörige torische Ideal $I_{\mathcal{A}} = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-})$ für eine Vektorkonfiguration $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\}$. Wir werden auch auf den Zusammenhang zwischen der Gleichung der strikt Transformierten X' und den monomialen Erzeugern von $K[X']$ eingehen.

Schließlich werden wir die Invariante für die Auflösung und geeignete Zentren für die Folge der Explosionen angeben.

Glatte und singuläre affine torische Hyperflächen

Da wir die Singularitäten von X auflösen wollen, stellt sich zuerst die Frage, wie man überprüfen kann, ob X glatt oder singulär ist.

Zuerst definieren wir allgemein den Begriff der Glattheit einer affinen algebraischen Varietät (dies entspricht im Wesentlichen dem Begriff der Mannigfaltigkeit in der Analysis bzw. Topologie) und werden dann speziell affine torische Hyperflächen im \mathbb{A}^n betrachten. Wir werden sehen, dass der singuläre Ort einer affinen torischen Hyperfläche immer aus (Vereinigungen von) Koordinatenunterräumen besteht.

Definition. Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Varietät und seien $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ Erzeuger des Ideals von Y . Es ist also $I(Y) = (f_1, \dots, f_s)$. Sei $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^s$ eine polynomiale Abbildung und sei $\mathbf{p} \in Y$ ein Punkt. Dann heißt \mathbf{p} ein *glatter* oder *regulärer Punkt* von Y , wenn die Jacobi-Matrix $Df(\mathbf{q})$ konstanten Rang für alle \mathbf{q} in einer (Zariski)-Umgebung von \mathbf{p} hat. Ansonsten heißt \mathbf{p} *singulärer Punkt*. Y heißt *glatt*, wenn alle Punkte $\mathbf{p} \in Y$ regulär sind.

Analog zu Mannigfaltigkeiten kann man den singulären Ort einer algebraischen Varietät definieren:

Definition. Sei Y eine affine algebraische Varietät wie oben. Der *singuläre Ort* von Y ist gegeben als

$$\text{Sing}(Y) := \{\mathbf{p} \in Y : \mathbf{p} \text{ ist singulärer Punkt von } Y\}.$$

Es gilt: $\text{Sing}(Y)$ ist in Y abgeschlossen.

Da wir uns im Folgenden mit affinen torischen Hyperflächen beschäftigen werden, wollen wir nähere Aussagen über den singulären Ort derartiger Varietäten treffen.

Sei $Y = V(f)$ eine beliebige Hyperfläche im \mathbb{A}^n , wobei $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$ polynomial und o.B.d.A. *reduziert* sei, das bedeutet, $(f) = \sqrt{(f)}$ ist. Dazu äquivalent ist: f ist quadratefrei, d.h., es treten keine Quadrate in der Primfaktorzerlegung von f auf. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{p} \in Y$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \text{ ist glatt} &\iff \text{grad}f(\mathbf{p}) \neq 0. \\ &\iff \text{Es existiert ein } i, 1 \leq i \leq n, \text{ sodass } \partial_i f(\mathbf{p}) \neq 0. \end{aligned}$$

Analog gilt für alle $\mathbf{p} \in Y$:

$$\mathbf{p} \in \text{Sing}(Y) \iff \text{für alle } i = 1, \dots, n \text{ ist } \partial_i f(\mathbf{p}) = 0.$$

Dies liefert die Beschreibung von $\text{Sing}(Y)$ als algebraische Menge:

$$\text{Sing}(Y) = V(f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f).$$

Der singuläre Ort von Y ist eine echte abgeschlossene Teilmenge von Y .

Wie sieht nun speziell der singuläre Ort bei unserer affinen torischen Hyperfläche $X = V(f)$ mit $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ aus? Wir nehmen im Folgenden an, dass f durch $x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d} - x_{d+1}^{b_{d+1}} \dots x_n^{b_n} = 0$ gegeben ist. Dann gilt $\mathbf{b}^+ = (b_1, \dots, b_d, 0, \dots, 0)$ bzw. $\mathbf{b}^- = (0, \dots, 0, b_{d+1}, \dots, b_n)$. Somit erhält man die i -te Komponente des Gradienten (=Jacobimatrix) durch

$$\text{grad}(f)_i = \begin{cases} b_i \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+ - \mathbf{e}_i}, & \text{falls } i \leq d \\ b_i \mathbf{x}^{\mathbf{b}^- - \mathbf{e}_i}, & \text{falls } i > d, \end{cases}$$

wobei \mathbf{e}_i den i -ten Standardbasisvektor von \mathbb{Z}^n bezeichnet. Beachte, dass $\text{grad}(f)_i = 0$ gilt, falls b_i gleich 0 ist. Dies ist der Fall, wenn das zugehörige x_i in der Gleichung nicht auftaucht. Der singuläre Ort von X ist gegeben als

$$\text{Sing}(X) = V(\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+ - \mathbf{e}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+ - \mathbf{e}_d}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}^- - \mathbf{e}_{d+1}}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}^- - \mathbf{e}_n}).$$

(Wir können die b_i aus den Gleichungen des Gradienten eliminieren, wenn $b_i \neq 0$ gilt). Zuerst interessiert uns, wann X glatt ist, d.h., wann $\text{Sing}(X) = \emptyset$ gilt. Wir zeigen dazu folgenden

Satz 5. Sei $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ in $K[x_1, \dots, x_n]$ wie oben. Dann ist die durch f definierte torische Hyperfläche $X = V(f)$ genau dann glatt, wenn $\mathbf{b} \in \pm\mathbb{N}^n$ oder $\mathbf{b}^+ = \mathbf{e}_i \in \mathbb{N}^n$, wobei $i \leq d$, oder $\mathbf{b}^- = \mathbf{e}_i \in \mathbb{N}^n$, wobei $i > d$ gilt. f ist von der Gestalt $f = 1 - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ bzw. $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - 1$ oder $f = x_i - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ bzw. $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - x_i$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass X für die oben angeführten Fälle glatt ist: (1) Sei $\mathbf{b} \in \pm\mathbb{N}^n$, dann gilt $d = 0$ oder $d = n$. Wir nehmen o.B.d.A. $d = 0$ an. Dann ist \mathbf{b}^+ der Nullvektor und $\mathbf{b}^- = (b_1, \dots, b_n)$. Die Gleichung von f lautet $f = 1 - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$. Der singuläre Ort von X ist also gegeben als Verschwindungsmenge

$$\text{Sing}(X) = V(1 - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}, x_1^{b_1-1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}, \dots, x_1^{b_1} \dots x_{n-1}^{b_{n-1}} \dots x_n^{b_n-1}).$$

Die erste dieser $n + 1$ Gleichungen liefert, dass für alle Punkte $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in X$ gelten muss: $1 = \mathbf{p}^{\mathbf{b}^-}$, d.h., für alle i muss $p_i \neq 0$ sein. Dies impliziert aber, dass auch jedes Produkt $p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \neq 0$, für $\alpha \in \mathbb{N}$. Daher kann \mathbf{p} nicht im singulären Ort von X liegen. Wir erhalten also $\text{Sing}(X) = \emptyset$. X ist in diesem Fall glatt.

(2) Sei jetzt f von der Form $x_i - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ bzw. $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - x_i$. Sei o.B.d.A. $i = 1$. Dann gilt $d = 1$ und $b_1 = 1$. Wir erhalten für den singulären Ort

$$\text{Sing}(X) = V(x_1 - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}, 1, \mathbf{x}^{\mathbf{b}^- - \mathbf{e}_2}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}^- - \mathbf{e}_n}).$$

Somit ist $\text{Sing}(X) \subseteq V(1) = \emptyset$ und X ist auch hier nichtsingulär.

Für die Rückrichtung betrachten wir einfach den singulären Ort von $V(f)$ für ein f mit $d > 1$, bzw. für $d = 1$ gelte zusätzlich $b_1 > 1$. Dann gilt:

$$\text{Sing}(X) = V(f, x_1^{b_1-1} x_2^{b_2} \dots x_d^{b_d}, \dots, x_{d+1}^{b_{d+1}} \dots x_n^{b_n-1}).$$

Wenn $b_1 > 1$ ist, so ist $\{0\} \subseteq \text{Sing}(X) \subseteq V(f)$, d.h., zumindest der Nullpunkt ist singulär. Wenn $b_1 = 1$, dann muss nach Voraussetzung $d > 1$ sein. Dies impliziert

$$\{0\} \subseteq \text{Sing}(X) \subseteq V(f).$$

Damit haben wir die Behauptung gezeigt. \square

Der singuläre Ort von X enthält also immer den Nullpunkt. Allgemein ist der singuläre Ort von $X = V(f)$ mit $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ gegeben als Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n V_i$ mit V_i Vereinigungen von Koordinatenunterräumen $H_i := \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n : x_i = 0\}$. Man kann alle V_i explizit angeben: $V_i = \bigcup_{j=1}^d H_j$, wenn $\mathbf{b}_i^+ \geq 1$ ist, wobei die Vereinigung über alle j mit $\mathbf{b}_j^+ \geq 1$ gebildet wird, falls $\mathbf{b}_i^+ > 1$ ist. Falls $\mathbf{b}_i^+ = 1$ ist, wird die Vereinigung über alle $j \neq i$ mit $\mathbf{b}_j^+ \geq 1$ gebildet. Weiters: $V_i = \bigcup_{j=d+1}^n H_j$, wenn $\mathbf{b}_i^- \geq 1$ ist, wobei wieder die Vereinigung über alle j mit $\mathbf{b}_j^- \geq 1$ gebildet wird, falls $\mathbf{b}_i^- > 1$ ist. Falls $\mathbf{b}_i^- = 1$ ist, wird die Vereinigung über alle $j \neq i$ mit $\mathbf{b}_j^- \geq 1$ gebildet. Wenn $\mathbf{b}_i^+ = \mathbf{b}_i^- = 0$, dann setze $V_i = \mathbb{A}^n$.

Zum Beispiel ist für $f = x_1^2 x_2^3 x_3 - x_6^2$ der singuläre Ort von $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^6$ gegeben als $\bigcap_{i=1}^6 V_i = (\bigcup_{j=1}^3 H_j) \cap (\bigcup_{j=1}^3 H_j) \cap (\bigcup_{j=1}^2 H_j) \cap \mathbb{A}^6 \cap \mathbb{A}^6 \cap H_6$.

Wir haben schon definiert, dass X genau dann aufgelöst ist, wenn $\mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- \in \pm\mathbb{N}^n$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f = 1 - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ bzw. $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - 1$ gilt. Dann schneidet X eventuelle exzeptionelle Divisoren, die immer durch eine Gleichung $x_i = 0$ gegeben sind, entweder überhaupt nicht, oder transversal.

Transformation von Idealen unter Explosionen

Wir werden im nachfolgenden Algorithmus als Zentrum der Explosion stets eine glatte Untervarietät Z der affinen torischen Hyperfläche X wählen. Wir verwenden immer ein Zentrum Z der Form $Z = V(x_i : i \in I)$, wobei die $x_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ und $|I| > 1$. Das Zentrum der Explosion des \mathbb{A}^n ist also ein *Koordinatenideal* $P = (x_i : i \in I)$, wobei $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ ist glatt. Denn: $\tilde{\mathbb{A}}^n$ wird von genau $|I|$ affinen Karten überdeckt, die sich geeignet zusammenkleben lassen. Wenn wir uns direkt in die j -te Karte der Explosion mit Zentrum P begeben, erhalten wir durch die Substitutionen

$$x_i \mapsto \begin{cases} x_i x_j & \text{für } i \in I \setminus \{j\} \\ x_i & \text{sonst} \end{cases}$$

die neuen Koordinaten des $\tilde{\mathbb{A}}^n$ in der j -ten Karte. Der exzeptionelle Divisor E ist in dieser Karte durch die Gleichung $x_j = 0$ gegeben. Unter *Koordinaten* verstehen wir ein reguläres Parametersystem von $K[x_1, \dots, x_n]$.

Sei o.B.d.A. $I = \{1, \dots, k\}$ mit $k \leq n$. Der Koordinatenring in der j -ten Karte ist dann gegeben durch

$$K \left[x_1, \dots, x_n, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_k}{x_j} \right] = K \left[\frac{x_1}{x_j}, \dots, x_j, \dots, \frac{x_k}{x_j}, x_{k+1}, \dots, x_n \right].$$

Bemerkung. (1) Wir betrachten hier die Explosionsabbildung $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ als Abbildung des affinen Raum auf sich selbst. D.h., man hat dieselben Koordinaten im Bild $\tilde{\mathbb{A}}^n$, so wie im ursprünglichen affinen Raum \mathbb{A}^n . Dadurch wird das Ablesen der Kartenausdrücke leichter, als wenn man zwei verschiedene \mathbb{A}^n mit verschiedenen Koordinatensystemen betrachten würde. Siehe dazu auch [EH].

(2) Bei Explosionen arbeitet man meistens lokal: man betrachtet \mathbb{A}^n in einem Punkt \mathfrak{p} mit lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_n des \mathbb{A}^n . Weiters geht man zur Vervollständigung $K[[x_1, \dots, x_n]]$ von $K[x_1, \dots, x_n]$ über, wobei die x_1, \dots, x_n ein reguläres Parametersystem bilden (siehe dazu [Ei]). Man erhält dann für die j -te Karte bei \mathfrak{p} den zugehörigen Ring

$$K[[x_1, \dots, x_n]] \left[\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_k}{x_j} \right].$$

Vervollständigung und Lokalisierung am Ideal $(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_k}{x_j}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ liefern den Koordinatenring der j -ten Karte $K[[\frac{x_1}{x_j}, \dots, x_j, \dots, \frac{x_k}{x_j}, x_{k+1}, \dots, x_n]]$. Dann bilden $y_i = \frac{x_i}{x_j}$ für $i < k$ und $y_i = x_i$ sonst, ein reguläres Parametersystem dieses Ringes. Genaueres dazu findet sich in [Ha1, Ha2].

Wir sind interessiert an der strikt transformierten X' unserer affinen torischen Hyperfläche $X = V(f)$ unter der Explosion des affinen Raumes in einem Koordinatenideal P , genauer an der Transformation des Ideals (f) . Sei $f^*(\mathbf{x}) = f(\pi_j(\mathbf{x}))$, wobei π_j der Kartenausdruck von $\tilde{\mathbb{A}}^n$ in der j -ten Karte ist, der Pullback von f auf $\tilde{\mathbb{A}}^n$. In der j -ten Karte ist f^* klarerweise wieder ein Polynom. Der exzeptionelle Divisor E ist in dieser Karte durch $x_j = 0$ definiert. Dann kann man f^* folgendermaßen faktorisieren:

$$f^* = x_j^r \cdot f',$$

wobei f' nicht mehr durch x_j teilbar ist. Die natürliche Zahl r ist unabhängig von der Karte und heißt die *exzeptionelle Multiplizität* von f^* , siehe [Ha3]. Man kann also

global $f^* = m_E^r \cdot f'$ schreiben, wobei m_E lokal in jeder affinen Karte ein Monom in einer der Variablen ist. Wir nennen f' die strikt Transformierte von f und erhalten damit $X' = V(f')$ in $\tilde{\mathbb{A}}^n$.

Bemerkung. (1) Wenn X keine Hyperfläche ist, so wird die Berechnung von X' wesentlich komplizierter. Man benötigt hier insbesondere den Begriff der Standardbasis eines Ideals (im Sinne von Hironaka), siehe [Ha3, Hi].

(2) Wenn P kein Koordinatenideal, insbesondere wenn P nicht reduziert ist, so wird das Berechnen der Kartenausdrücke ebenso erschwert. Wir werden darauf im nächsten Kapitel eingehen.

Beispiel 4. Sei X im \mathbb{A}^3 mit Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y, z)$ gegeben durch $V(x^4 - y^2 z^9)$. Dann ist der singuläre Ort von X die Vereinigung der y - und der z -Achse. Sei $I = (x, y, z)$ das Ideal des Ursprungs Z in \mathbb{A}^3 . In der x -Karte erhält man $f^* = x^4 - x^{11} y^2 z^9 = x^4(1 - x^7 y^2 z^9)$. Dann ist die strikt Transformierte $X' = V(1 - x^7 y^2 z^9)$ glatt und X ist in dieser Karte aufgelöst. Denn: der exzeptionelle Divisor $E : x = 0$ schneidet X' nicht, die normale Kreuzungsbedingung ist also erfüllt. In der y -Karte hingegen gilt $f^* = y^4 x^4 - y^{11} z^9 = y^4(x^4 - y^7 z^9)$ und damit $X' = V(x^4 - y^{11} z^9)$. Hier ist von Auflösung keine Spur, die Singularität scheint sich sogar verschlechtert zu haben! Schließlich ist X' in der z -Karte gegeben durch $f' = x^4 - y^2 z^7$. Hier ist die Singularität zwar nicht aufgelöst, wenigstens gilt aber $\deg(f') < \deg(f)$.

Gleichung und Koordinatenring einer affinen torischen Hyperfläche

Bis jetzt haben wir uns nur mit der Transformation der Gleichung der affinen torischen Hyperfläche X beschäftigt. Wir könnten jedoch auch von vorneherein im Koordinatenring $K[X]$, der bekanntlich von Monomen erzeugt wird, arbeiten. Wir werden nun die Transformation von $K[X]$ unter der Explosion in einem Koordinatenideal angeben. Weiters werden wir untersuchen, wie sich die Relationen der Erzeuger von $K[X]$ im Vergleich zu den Relationen der Erzeuger des Koordinatenrings $K[X']$ der strikt Transformatierten verhalten. Schließlich werden wir zeigen, wie man allein durch Anwendung von linearer Algebra aus den Erzeugern von $K[X]$ die (reduzierte) Gleichung von X zurückgewinnen kann.

Sei $X = V(f)$ eine affine torische Hyperfläche im \mathbb{A}^n . Sei $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}} - 1$, wobei $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-$. Sei f o.B.d.A. *reduziert*, d.h., $\text{ggT}(b_1, \dots, b_n) = 1$. Da $\dim(X) = n - 1$, ist $K[X]$ von der Form $K[x_1, \dots, x_n]/(f) = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in \mathcal{A}]$, wobei $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ mit $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, \dots, a_{n-1,i})$ und $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n-1})$. Wir bezeichnen wieder mit $A \in \mathbb{Z}^{(n-1) \times n}$ die Matrix, deren Spalten die \mathbf{a}_i bilden. Da $\text{ggT}(b_1, \dots, b_n) = 1$ gilt, ist $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{n \times 1}$ ein Erzeuger des Relationenmoduls $\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n : A\mathbf{c} = \mathbf{0}\}$ der \mathbf{a}_i . Es gilt also

$$A\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Transformation des Koordinatenrings einer affinen torischen Hyperfläche unter Explosionen

Wir betrachten die Transformation von \mathcal{A} bzw. A unter der Explosion des \mathbb{A}^n mit Zentrum ein Koordinatenideal $P = (x_i : i \in I)$ mit $|I| \geq 2$. Sei $K[x_1, \dots, x_n, \frac{x_i}{x_j} : i \in I]$ der Koordinatenring der j -ten Karte der Explosion des \mathbb{A}^n in P . Da \mathbb{A}^n eine torische Varietät ist, können wir diesen Ring wie oben als $K[\mathbf{x}^{\mathcal{V}} : \mathbf{v} \in \mathcal{V}]$ schreiben. Dabei ist

$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ eine Vektorkonfiguration mit $\mathbf{v}_i \in \mathbb{Z}^n$, die durch

$$\mathbf{v}_i := \begin{cases} \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j & \text{für } i \in I \setminus \{j\} \\ \mathbf{e}_i & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Es bezeichne \mathbf{e}_i den i -ten Standardbasisvektor. Setze analog zu oben $V := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Damit erhalten wir schnell die Matrix $A' = AV$ der Erzeuger der j -ten Karte der Explosion unserer torischen Hyperfläche X . Es gilt also in der j -ten Karte $K[X'] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}'} : \mathbf{a}' \in \mathcal{A}']$. Sei $\mathcal{A}' = \{\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_n\}$, wobei \mathbf{a}'_i die i -te Spalte $(AV)_{-i}$ der Matrix AV sei. Da $\det(V) = \pm 1$ gilt (vgl. Abschnitt über Newtonpolyeder später), erhält man aus der Gleichung

$$(AV)(V^{-1}\mathbf{b}) = 0$$

auch den neuen Erzeuger \mathbf{b}' des Relationenmoduls von A' . Genauer: Es gilt $\mathbf{b}' = V^{-1}\mathbf{b}$.

Beispiel 5. Sei X der Whitney-Regenschirm im \mathbb{A}^3 mit Koordinatenring $K[X] = K[x, y, z]/(x^2 - y^2z) \cong K[st, s, t^2]$. Hier ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der singuläre Ort von X ist die z -Achse $V(x, y)$. Wir explodieren \mathbb{A}^3 also im Ideal (x, y) . In der x -Karte erhalten wir

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daraus ergeben sich

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}' = (0, -2, -1)^T.$$

In dieser Karte ist X glatt, da $K[st, t^{-1}, t^2]$ isomorph zu $K[s, t, t^{-1}]$ ist. $K[s, t, t^{-1}]$ wiederum ist der Koordinatenring der glatten normalen torischen Varietät $K \times K^*$. Beachte, dass $\mathbf{b}' \in -\mathbb{N}^3$ ist! Die zugehörige Gleichung von X' in der x -Karte lautet $1 = y^2z$.

In der y -Karte ist

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}' = (2, 0, -1).$$

In dieser Karte lautet $K[X'] = K[s, t, t^2]$. Dieser Ring ist isomorph zum Polynomring in zwei Variablen.

Relationen und Erzeuger

Wir wollen eine affine torische Hyperfläche durch eine Folge von Explosionen auflösen. Dazu werden wir einen Invariantenvektor konstruieren, dessen Komponenten wir aus den Exponenten der (reduzierten) Gleichung von X gewinnen. Wenn wir den Koordinatenring $K[t^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathcal{A}]$ gegeben haben, so entsprechen die Exponenten der Gleichung von X gerade einem Erzeuger $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-$ des Relationenmoduls der zu \mathcal{A} gehörenden Matrix A . Wir zeigen nun, wie man die Gleichung $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ von X allein aus der Matrix A erhält. Betrachte zuerst folgendes Beispiel:

Beispiel 6. Zur Abwechslung sei X in \mathbb{A}^3 durch $K[s^2, s^3t^2, t]$ gegeben. Die Matrix A besteht also aus den drei Vektoren $\mathbf{a}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1)$. In Ermangelung weiterer Informationen schauen wir uns die *Flächeninhalte* zwischen den Vektoren an (diese entsprechen den Determinanten der 2×2 Minoren von A): dabei bezeichne $[A]_3 = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 4$ die Determinante der Matrix, die durch Streichen der 3. Spalte aus A hervorgeht. Analog ergeben sich $[A]_2 = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = 2$ und $[A]_1 = \det(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 3$. Hier gilt also $\mathbf{b} = ([A]_1, -[A]_2, [A]_3)$. D.h. hier sind die Beträge der Determinanten sogar gleich den \mathbf{b}_i !

Im Folgenden verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie im vorhergehenden Abschnitt. Weiters nehmen wir an, dass der Rang von $A \in \mathbb{Z}^{n-1 \times n}$ gleich $n-1$ ist. Bezeichne $[A]_i$ die *Determinante* des $n-1 \times n-1$ Minors von A , der durch Streichen der i -ten Spalte $A_{-,i}$ von A entsteht. Seien weiters die \mathbf{a}_i (Spalten von A) so angeordnet, dass

$$\beta_n := \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$$

ungleich Null ist, β_n ist also gleich $[A]_n$. Wir suchen nun ein \mathbf{b} , sodass $A\mathbf{b} = 0$ gilt. Definiere dazu

$$\beta_i := \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_{n-1}).$$

β_i ist die Determinante der Untermatrix von A , in der man die i -te Spalte durch die n -te Spalte ersetzt. Es gilt $[A]_i = (-1)^{n-i-1} \beta_i$.

Satz 6. Seien $A, \beta_i, b_i, \mathbf{a}_i$ wie oben definiert. Durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{Z}^n \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) &\mapsto \frac{1}{\text{ggT}(\beta_1, \dots, \beta_n)} (\beta_1, \dots, -\beta_n) \end{aligned}$$

erhalten wir aus den Determinanten $[A]_i = (-1)^{n-i-1} \beta_i$ der $(n-1) \times (n-1)$ Minoren von A den Vektor

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{d+1}) = \Phi(\beta_1, \dots, \beta_n),$$

wobei \mathbf{b} die Relation $\sum_{i=1}^{d+1} b_i \mathbf{a}_i = 0$ erfüllt. \mathbf{b} ist ein Erzeuger von $\ker_{\mathbb{Z}}(A)$, da $\text{ggT}(b_1, \dots, b_n) = 1$ gilt. \mathbf{b} ist bis auf das Vorzeichen eindeutig.

Beweis. Angenommen, wir kennen ein $\mathbf{b} \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$ mit o.B.d.A. $\text{ggT}(b_1, \dots, b_n) = 1$ und $b_n \neq 0$. \mathbf{b} erfülle die Relation

$$b_1 \mathbf{a}_1 + \dots + b_n \mathbf{a}_n = 0. \quad (*)$$

Wegen $b_n \neq 0$ können wir diese Gleichung zu

$$\mathbf{a}_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{b_n} \mathbf{a}_i$$

umformen. Nach der *Cramer'schen Regel*, angewandt auf die Matrix $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1})$, gilt

$$-\frac{b_i}{b_n}\beta_n = \beta_i.$$

Einsetzen in (*) und Kürzen ergibt, dass die \mathbf{a}_i auch folgende Relation erfüllen:

$$\beta_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{a}_i, \text{ bzw. } \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{a}_i - \beta_n \mathbf{a}_n = 0.$$

Damit ist die obige Behauptung gezeigt. \square

Beispiel 7. Betrachte $X : x_1 x_2 x_3^{-1} x_4^{-1} = 1$ im \mathbb{A}^4 . Dann ist $\mathbf{b} = (1, 1, -1, -1)$. Wir wollen nun \mathbf{b} mit dem obigen Satz aus dem Koordinatenring $K[x] = K[t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}]$ berechnen. Unsere Matrix A ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zuerst bestimmen wir aus den Determinanten der 3×3 Minoren $[A]_i$ den Vektor

$$\beta = (1, 1, -1, 1) \in \mathbb{Z}^4.$$

Somit ist $\Phi(\beta) = \frac{1}{1}(1, 1, -1, -1) = \mathbf{b}$.

Beispiel 8. Sei nun $X : x_1^2 x_2^{-3} x_3^{-3} = 1$ das "Zitronenbäumchen" im \mathbb{A}^3 . Dann gilt $n = 3$ und $\mathbf{b} = (2, -3, -3)$. Der Koordinatenring von X lautet $K[X] = K[t_1^3 t_2^3, t_1^2, t_2^2]$, also

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir $\beta = (-4, 6, -6)$. Beachte, dass hier der ggT der Determinanten nicht 1 ist! Daher:

$$\mathbf{b} = \Phi(\beta) = \frac{1}{2}(-4, 6, 6).$$

Algorithmus

Wir werden nun zeigen, wie man eine singuläre affine torische Hyperfläche $X = V(\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-})$ in \mathbb{A}^n durch eine endliche Folge von Explosionen in bestimmten Zentren auflösen kann. Wir achten zunächst nicht auf *Symmetrien* zwischen den x_i . Unter Symmetrien verstehen wir hier, dass $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ bzw. $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- \in \mathbb{Z}^n$ invariant unter der Operation einer Symmetriegruppe G aus S_n ist. Zum Beispiel ist der Kegel $V(x^2 - yz) \subseteq \mathbb{A}^3$ symmetrisch bzgl. $G = \{(23), id_{S_3}\}$, der Permutation von y und z .

Es reicht aus, wenn wir als Zentren der Explosionen jeweils Koordinatenunterräume der affinen Karten wählen. In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, dass man entweder mit der definierenden Gleichung von X oder "dual" dazu mit $K[X] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathcal{A}]$ für eine Vektorkonfiguration $\mathcal{A} \in \mathbb{Z}^{n-1}$, arbeiten kann. Denn wenn man nur \mathcal{A} kennt, kann man mit Hilfe von Satz 6 aus den Determinanten der Matrizen, die von jeweils $n - 1$ der \mathbf{a}_i gebildet werden, alle Größen, die im Folgenden auftauchen, berechnen. Um weniger notationellen Aufwand betreiben zu müssen, werden wir mit den Gleichungen arbeiten.

Unsere Methode der Auflösung von affinen torischen Hyperflächen durch eine Folge von Explosionen ist eine Alternative zu den *torischen Modifikationen* mit Fächern und Kegeln (vgl. [Ew, Fu, KKMS, Od1]). Torische Modifikationen liefern eine Auflösung, die weder eingebettet noch symmetrie-invariant ist.

Bierstone und Milman [BM] beweisen eine Auflösung von Singularitäten von torischen Varietäten über perfekten Körpern beliebiger Charakteristik, allerdings ist auch dieser Ansatz nicht symmetrie-invariant.

Auch bei unserer Methode ist die Wahl der Zentren nicht symmetrie-invariant. Im nächsten Abschnitt werden wir daher auch Explosionen in nichtreduzierten monomialen Zentren betrachten.

Um eine geeignete Folge von Explosionen zu konstruieren, stellen sich zuerst folgende Fragen:

- (1) Welche Zentren müssen wir wählen, damit sich die Singularität “verbessert”?
- (2) Wie können wir diese Verbesserung messen?
- (3) Terminiert der Algorithmus, d.h., erreichen wir durch Explosionen in den in (1) gewählten Zentren wirklich nach endlich vielen Schritten eine Auflösung der Singularitäten von X ?

Bevor wir unsere Überlegungen zu diesen Fragen mitteilen, betrachten wir einige illustrative Beispiele von Flächen im \mathbb{A}^3 .

Beispiel 9. Sei $X = V(x^2 - yz) \subseteq \mathbb{A}^3$ der Doppelkegel. X besitzt nur eine einzige Singularität, den Nullpunkt. Wenn wir als Zentrum der Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ den Nullpunkt mit Ideal $P = (x, y, z)$ wählen, erhalten wir in den drei Karten folgende Ausdrücke für die strikt transformierte X' : in der x -Karte ist $X' = V(1 - yz)$ glatt, in der y -Karte ist $X' = V(x^2 - z)$ ebenfalls glatt und die z -Karte ist symmetrisch zur y -Karte bzgl. der Permutation $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$. Diese Wahl des Zentrums erhält also die Symmetrien und löst die Singularität in allen drei Karten auf.

Wir hätten jedoch auch ein Zentrum Z von größerer Dimension wählen können. Wir werden allgemein immer nur Zentren Z wählen, für die $Z \subseteq X$ gilt. In unserem Fall kommt daher die x -Achse nicht in Frage. Mögliche Kandidaten wären entweder die y - oder die z -Achse. Dies macht wegen der Symmetrie bzgl. $y \leftrightarrow z$ keinen Unterschied. Sei nun $P = (x, y)$. In der x -Karte lautet $X' = V(1 - xy^2z)$ glatt und aufgelöst, in der y -Karte gilt $X' = V(x^2 - z)$ ebenso glatt, jedoch nicht aufgelöst.

Beispiel 10. Sei nun $X = V(x^2 - y^2z)$ der Whitney-Regenschirm im dreidimensionalen affinen Raum. In Beispiel 5 haben wir gesehen, dass die Explosion in der z -Achse in beiden Karten ein glattes X' liefert. Wenn wir aber als Zentrum die y -Achse mit Ideal $P = (x, z)$ wählen, erhalten wir in der x - bzw. z -Karte die strikt transformierte $V(x - y^2z)$ bzw. $V(x^2 - y^2z)$. In der z -Karte ist keine Veränderung der Singularität eingetreten.

Wenn man also ein geeignetes Zentrum maximaler Dimension verwendet, scheint sich die Singularität zu verbessern. Wenn wir jedoch ein kleineres Zentrum wählen, der einzige kanonische Kandidat ist hier der Nullpunkt mit Ideal $P = (x, y, z)$, erhalten wir in der x -Karte ein glattes $X' = V(1 - xy^2z)$ und in der y -Karte den Kegel $X' = V(x^2 - yz)$ mit “milderer” Singularität nur den Nullpunkt. In der z -Karte ist jedoch X' durch $V(x^2z - y^2)$ mit Singularität wieder die z -Achse gegeben. Hier ist sogar nicht einmal die Ordnung bzw. der Grad der Gleichung gefallen, alles ist unverändert!

Die Wahl der Zentren

In den beiden obigen Beispielen haben wir gesehen, dass die Singularitäten bei einer Explosion in einem zu kleinen Zentrum nicht besser werden, sie können unter Umständen sogar größer werden. Wenn wir ein größeres Zentrum Z wählen, könnten bei $Z \not\subseteq X$ ebenso Singularitäten größerer Dimension auftreten. Auch wenn $Z \subseteq X$ gilt, ist die Verbesserung der Singularitäten nicht gesichert. Wir werden deshalb immer Zentren $Z \subseteq X$ maximaler Dimension wählen. Wir haben in Abschnitt 2.3 schon den singulären Ort einer affinen torischen Hyperfläche genauer untersucht. Im Folgenden werden wir als Zentrum $Z \subseteq X$ immer einen Koordinatenunterraum der Kodimension 2 wählen, d.h., $Z = V(x_i, x_j)$ für $i \neq j$. Für eine singuläre Hyperfläche existiert immer ein Z dieser Gestalt, denn dann existiert zumindest jeweils ein $b_i^+ \neq 0$, bzw. ein $b_j^- \neq 0$. Dann ist $f(\mathbf{p}) = 0$ für alle Punkte \mathbf{p} mit $p_i = 0$ und $p_j = 0$. Daher ist $V(x_i, x_j) \subseteq X$. Wir haben meist mehrere Möglichkeiten, i und j zu wählen. Wir werden für ein X , das durch $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ gegeben ist, immer die beiden “maximalen Exponenten” b_i, b_j wählen. Sei

$$\mu^+ := \max \mathbf{b}^+ = \max_k \{b_k^+\},$$

und entsprechend

$$\mu^- := \max \mathbf{b}^- = \max_k \{b_k^-\}.$$

Diese beiden Maxima können natürlich von mehreren k angenommen werden, z.B. ist für $f = x_1^3 x_2^3 x_3^2 - x_4^8$ die Zahl $\mu^+ = 3$, wobei dieser Exponent für $k = 1, 2$ auftaucht. $\mu^- = 8$ ist hingegen eindeutig. Es wären somit beide Zentren $Z_1 = V(x_1, x_4)$ und $Z_2 = V(x_2, x_4)$ “gleich gut”.

Wenn also $\mu^{+/-}$ von mehreren k angenommen wird, so ist dies der Punkt, an dem die Symmetrie im Auflösungsprozess zerstört wird. Wir müssen uns immer für *ein* Zentrum entscheiden. Man könnte alternativ dazu Vereinigungen von Koordinatenunterräumen der Form $V(x_i, x_j)$ als Zentren in Betracht ziehen, doch dann ist die Explosion des \mathbb{A}^n im Allgemeinen singulär. Auf diese Situation werden wir im folgenden Kapitel eingehen. Um das Zentrum eindeutig zu machen, wähle daher

$$i := \min\{k : b_k^+ = \mu^+\} \text{ und } j := \min\{k : b_k^- = \mu^-\}.$$

Im Beispiel oben wäre also Z_1 das zu wählende Zentrum.

Die Induktionsinvariante \mathcal{I}

Das nächste Problem ist die “Messung” der Singularitäten von X . Dazu verwenden wir nur Informationen aus der Gleichung von X . Wir werden die Singularität immer lokal im Nullpunkt jeder affinen Karte messen, da dieser Punkt immer am “singulärsten” ist. Wir betrachten also eine affine torische singuläre Hyperfläche X im \mathbb{A}^n die durch ein Binom $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ gegeben ist. Seien μ^+ und μ^- wie oben definiert und seien weiters

$$m^+ := \text{mult}(\mu^+) = \#\{b_k^+ : b_k^+ = \mu^+\},$$

und

$$m^- := \text{mult}(\mu^-) = \#\{b_k^- : b_k^- = \mu^-\}.$$

m^\pm misst also die Vielfachheit, mit der μ^\pm angenommen wird. Daher gilt: $m^\pm \geq 1$, falls $\mu^\pm \geq 1$. Nun sind \mathbf{b}^+ und \mathbf{b}^- nicht eindeutig bestimmt (denn durch Multiplikation von f mit -1 tauschen die beiden Vektoren ihre Rollen), wir nehmen ab jetzt

o.B.d.A. an, dass bei

$$f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-} = x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d} - x_{d+1}^{b_{d+1}} \dots x_n^{b_n},$$

die x_k so geordnet sind, dass $b_1 \geq \dots \geq b_d$ bzw. $b_{d+1} \geq \dots \geq b_n$ gilt. Dies kann man immer durch geeignete Permutation der Koordinaten erreichen. Um \mathbf{b}^\pm eindeutig festzulegen sei weiters o.B.d.A. $b_1 \leq b_{d+1}$.

Der Invariantenvektor $\mathcal{I} \in \mathbb{N}^4$ sei nun eindeutig durch

$$\mathcal{I} := (\mu^+, \mu^-, m^+, m^-)$$

definiert. Die ersten beiden Komponenten von \mathcal{I} geben das Zentrum der folgenden Explosion an. Die letzten beiden Komponenten werden benötigt, um zu zeigen, dass die Invariante nach jeder Explosion *echt* lexikographisch kleiner geworden ist. Wir werden mit \mathcal{I}'_j oder \mathcal{I}'_{x_j} die Invariante der strikt transformierten X' in der j -ten Karte der Explosion bezeichnen. Setze $\mathcal{I}' := \max_j \mathcal{I}'_j$.

Wir betrachten \mathcal{I} bzgl. der *lexikographischen Ordnung*. Zur Erinnerung: ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ ist lexikographisch kleiner als $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$, d.h., $\mathbf{v} <_{lex} \mathbf{w}$ genau dann, wenn ein $k \leq n$ existiert, sodass $v_i = w_i$ für alle $i \leq k-1$ und $v_k < w_k$ gilt.

Beispiel 11. (1) Betrachte $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^5$ mit $f = x_1^{13} x_2^8 x_3^5 - x_4^{13} x_5^{13}$. Dann ist $\mathbf{b}^+ = (13, 8, 5, 0, 0)$ und $\mathbf{b}^- = (0, 0, 0, 13, 13)$, d.h. es gilt $\mu^\pm = 13$ und $m^+ = 1$ bzw. $m^- = 2$, also $\mathcal{I} = (13, 13, 1, 2)$.

(2) Wähle Koordinaten x, y, z in \mathbb{A}^3 . Sei $X = V(f)$ mit $f = x^2 - y^3 z^2$, das "Zelt". Dann ist $\mathcal{I} = (2, 3, 1, 1)$. Der singuläre Ort besteht hier aus der Vereinigung der y -Achse $V(x, z)$ und der z -Achse $V(x, y)$. Wenn wir als Zentrum der Explosion den Nullpunkt wählen, erhalten wir in der x -Karte die strikt transformierte $f' = 1 - x^3 y^3 z^2$ mit $\mathcal{I}'_x = (0, 3, 0, 2)$, in der y -Karte $f' = x^2 - y^3 z^2$ mit $\mathcal{I}'_y = \mathcal{I}$ und in der z -Karte schließlich $f' = x^2 - y^3 z^3$ mit $\mathcal{I}'_z = (2, 3, 1, 2)$. Dann ist $\mathcal{I}' = \mathcal{I}'_z > \mathcal{I}$. Bei falscher Wahl des Zentrums bleibt \mathcal{I} also nicht gleich, sondern wird sogar echt lexikographisch größer!

Transformation der Invariante bei Explosionen

Sei nun X eine affine torische singuläre Hyperfläche, die durch f wie oben definiert ist. X ist aufgelöst, wenn $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- \in \pm \mathbb{N}^n$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn μ^+ oder μ^- gleich 0 ist. Sei $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ die Explosion mit Zentrum Z in \mathbb{A}^n . Bezeichne X' die strikt transformierte und $E = \pi^{-1}(Z)$ den exzeptionellen Divisor unter der Explosion π .

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten der Invariante $\mathcal{I} \in \mathbb{N}^4$ bei Explosionen in den oben bestimmten Zentren. Wir wollen zeigen, dass durch die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ in Z die Invariante \mathcal{I}' der strikt transformierten f' echt lexikographisch kleiner wird. Dann können wir Induktion anwenden, da \mathbb{N}^4 wohlgeordnet ist. Nach endlich vielen Schritten wird daher entweder die erste oder die zweite Komponente von \mathcal{I} zu 0. Das bedeutet, dass X dann aufgelöst ist.

Zu Beginn sei $X = V(f)$ mit

$$f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-} = x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d} - x_{d+1}^{b_{d+1}} \dots x_n^{b_n},$$

wobei wir wie oben x_1, \dots, x_n so wählen, dass $b_1 \geq \dots \geq b_d$ bzw. $b_{d+1} \geq \dots \geq b_n$ ist und zusätzlich $b_1 \leq b_{d+1}$ gilt. Somit gilt für X :

$$\mathbf{b}^+ = (b_1, b_2, \dots, b_d, 0, \dots, 0),$$

$$\mathbf{b}^- = (0, \dots, 0, b_{d+1}, \dots, b_n).$$

Daher erhalten wir die Invariante $\mathcal{I} = (b_1, b_{d+1}, m^+, m^-)$, wobei $m^\pm \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $1 \leq m^+ \leq d$ bzw. $1 \leq m^- \leq n - d$.

Nun zur Wahl des Zentrums: Sei $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Das Zentrum Z der Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ sei gegeben durch $Z = V(P)$, wobei $P = (x_i : i \in I)$. Wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben, transformieren sich die Koordinaten in der j -ten Karte zu:

$$x_i \mapsto \begin{cases} x_i x_j & \text{falls } i \in I \setminus \{j\}, \\ x_i & \text{falls } i \notin I \setminus \{j\}. \end{cases}$$

Zu Beginn wählen wir wegen $\mu^+ = 1$ und $\mu^- = d + 1$ als Zentrum $Z = V(x_1, x_{d+1})$. Es gilt also $I = \{1, d + 1\}$ und damit $P = (x_1, x_{d+1})$. Nun ist die Frage, wie sich die Gleichung der strikt transformierten X' in den beiden affinen Karten verhält. Wir betrachten zuerst die

x_1 -Karte. Die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ ist in dieser Karte durch $\pi_1 : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ mit

$$\pi_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, x_1 x_{d+1}, x_{d+2}, \dots, x_n)$$

gegeben. Der exzeptionelle Divisor ist $E = V(x_1)$. Die Gleichung der total transformierten X^* lautet somit

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_d^{b_d} = x_1^{b_{d+1}} x_{d+1}^{b_{d+1}} \dots x_n^{b_n}.$$

Wegen unserer Annahme $b_1 \leq b_{d+1}$ erhält man für die strikt transformierte X' also die Gleichung

$$x_2^{b_2} \dots x_d^{b_d} = x_1^{b_{d+1} - b_1} x_{d+1}^{b_{d+1}} \dots x_n^{b_n}.$$

Für die Angabe von \mathcal{I}'_{x_1} müssen wir nun mehrere Fälle unterscheiden:

(1) Sei zuerst b_1 echt kleiner als b_{d+1} . Hier können nochmals zwei Unterfälle auftreten:
 (1.1) Falls $b_1 > b_2$ gilt, ist die Vielfachheit $m^+ = 1$, d.h., \mathcal{I} ist durch $(b_1, b_{d+1}, 1, m^-)$ gegeben. Daher erhalten wir

$$\mathcal{I}'_{x_1} = \left(\underbrace{b_2}_{< b_1}, b_{d+1}, (m^+)', m^- \right),$$

wobei $(m^+)' = \text{mult}(b_2)$ womöglich größer als m^+ ist (dies wirkt sich aber nicht auf $<_{lex}$ aus!). Daher ist wie erwartet $\mathcal{I}'_{x_1} <_{lex} \mathcal{I}$.

(1.2) Falls $b_1 = b_2$, ist $m^+ > 1$, daher

$$\mathcal{I}'_{x_1} = \left(\underbrace{b_2}_{= b_1}, b_{d+1}, m^+ - 1, m^- \right).$$

Hier ist also $m^+ - 1 = (\mathcal{I}'_{x_1})_3 < (\mathcal{I})_3$, und damit $\mathcal{I}'_{x_1} <_{lex} \mathcal{I}$.

(2) Wenn jedoch $b_1 = b_{d+1}$ ist, kürzt sich die Variable x_1 aus der Gleichung, d.h. die Anzahl der Variablen, die in der Gleichung vorkommen, verringert sich. Es gilt dann

$$\mathcal{I}'_1 = (b_2, b_{d+1}, (m^+)', m^-).$$

(2.1) Wenn $b_1 = b_2$, so bleibt zwar die erste Komponente von \mathcal{I}'_1 gleich, allerdings ist dann $(m^+)' = m^+ - 1$.

(2.2) Wenn $b_1 > b_2$, dann ist schon die erste Komponente von \mathcal{I}'_1 echt kleiner als die erste Komponente von \mathcal{I} .

In beiden Fällen ist somit $\mathcal{I}'_{x_1} <_{lex} \mathcal{I}$. In der x_1 -Karte ist alles klar und wir betrachten nun die

x_{d+1} -Karte. Man erhält die Abbildung $\pi_{d+1} : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$, mit

$$\pi_{d+1} : (x_1, x \dots, x_n) \mapsto (x_1 x_{d+1}, x_2, \dots, x_n).$$

Der exzeptionelle Divisor ist $E = V(x_{d+1})$. Die total Transformierte von X genügt der Gleichung $x_1^{b_1} x_{d+1}^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_d^{b_d} = x_{d+1}^{b_{d+1}} x_{d+2}^{b_{d+2}} \cdots x_n^{b_n}$. Damit besitzt unsere strikt Transformierte die Gleichung

$$x_1^{b_1} \cdots x_d^{b_d} = x_{d+1}^{b_{d+1}-b_1} x_{d+2}^{b_{d+2}} \cdots x_n^{b_n}.$$

Die Invariante verhält sich ähnlich wie in der x_1 -Karte:

(1) Für b_1 echt kleiner als b_{d+1} gilt:

(1.1) Für $b_{d+1} > b_{d+2}$ bleibt $(\mu^+)' = \mu^+$. Aber es gilt $(\mu^-)' = \max\{b_{d+1} - b_1, b_{d+2}\} < b_{d+1}$. Wie verlangt ist die zweite Komponente der Invariante von X' kleiner, daher gilt $\mathcal{I}'_{x_{d+1}} <_{lex} \mathcal{I}$.

(1.2) Für $b_{d+1} = b_{d+2}$ funktioniert alles analog wie in der x_1 -Karte. Hier ist $(m^-)' = m^- - 1$, sodass auch $\mathcal{I}'_{x_{d+1}} <_{lex} \mathcal{I}$ gilt.

(2) Schließlich ergibt für $b_1 = b_{d+1}$ die analoge Überlegung wie in der x_1 -Karte (mit m^- statt m^+), dass auch hier $\mathcal{I}'_{x_{d+1}} <_{lex} \mathcal{I}$ gilt.

Somit ist die Invariante $\mathcal{I}' = \max_{<_{lex}} \{\mathcal{I}'_{x_1}, \mathcal{I}'_{x_{d+1}}\}$ der strikt Transformierten X' echt lexikographisch kleiner als \mathcal{I} . Wir können die lexikographische Induktion auf \mathcal{I} anwenden. Dann werden die Singularitäten von X durch eine endliche Folge von Explosionen

$$\tilde{X} = X^N \xrightarrow{\pi_N} \dots \xrightarrow{\pi_1} X^0 = X$$

aufgelöst.

Wenn man nun die torische Hyperfläche $X = X^0 = V(\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-})$ konkret auflösen möchte, geht man folgendermaßen vor: zuerst berechnen wir die Invariante $\mathcal{I} := (\mu^+, \mu^-, m^+, M^-)$ und wählen entsprechend μ^\pm das erste Zentrum als $Z_0 = V(x_1, x_{d+1})$. Setze $\mathcal{I}' = \max\{\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2\}$. Wenn man beide Karten richtig verklebt, erhält man eine affine Überdeckung von \tilde{X}^0 . $\tilde{X}^0 = X^1$ ist in beiden Karten von $\pi_1 : X^1 \rightarrow X^0 = X$ aufgelöst, wenn $(\mathcal{I}')_1 = 0$ oder $(\mathcal{I}')_2 = 0$ gilt. Falls X nur in einer Karte aufgelöst ist, wählen wir das nächste Zentrum in der anderen Karte. Ansonsten müssen wir in beiden Karten entsprechend \mathcal{I}'_{x_1} bzw. $\mathcal{I}'_{x_{d+1}}$ die Zentren $Z_1^1 = V(x_i, x_j)$ mit $i = \min_{1 \leq k \leq n} \{k : b_k = (\mu_{x_1}^+)' \}$ und $j = \min_{1 \leq k \leq n} \{k : b_k = (\mu_{x_1}^-)' \}$ bzw. $Z_1^{d+1} = V(x_i, x_j)$ mit $i = \min_{1 \leq k \leq n} \{k : b_k = (\mu_{x_{d+1}}^+)' \}$ und $j = \min_{1 \leq k \leq n} \{k : b_k = (\mu_{x_{d+1}}^-)' \}$ wählen. Dann erhalten wir die zweite Explosion $\pi_2 : \tilde{X}^1 = X^2 \rightarrow X^1$. Wenn man wieder die zugehörigen Karten richtig verklebt, erhält man damit eine Überdeckung von X^2 mit 4 affinen Karten. Setze $\mathcal{I}'' = \max_{1 \leq i \leq 4} \mathcal{I}''_i < \mathcal{I}'$. Falls X^2 immer noch singularär ist, so lese aus den jeweiligen Invarianten \mathcal{I}''_i die nächsten Zentren $Z_2^{1,i_1}, Z_2^{1,j_1}, Z_2^{d+1,i_2}, Z_2^{d+1,j_2}$ ab und erhalte schließlich $\pi_3 : X^3 \rightarrow X^2$. Wie wir oben gezeigt haben, erhalten wir nach N Schritten ein glattes X^N .

Bemerkung. Bierstone-Milman [BM] verwenden einen ähnlichen Algorithmus, wählen allerdings andere Zentren und betrachten auch eine andere Invariante. Wir werden nun kurz darauf eingehen. Sei X wieder eine affine torische Hyperfläche. Als Zentrum Z wird eine Komponente des *Toplocus* $\text{Top}(X)$ von X gewählt. Der Toplocus (auch *equimultipler Locus* genannt) ist der Zariski-Abschluss der Punkte in denen die Ordnung der Gleichung von X maximal ist. Wenn wir also die affine torische Hyperfläche X im \mathbb{A}^n durch das Binom $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ gegeben haben, so ist ihr Toplocus $\text{Top}(X)$ eine Vereinigung von Koordinatenunterräumen des \mathbb{A}^n . Wenn wir zusätzlich o.B.d.A. $|\mathbf{b}^+| \leq |\mathbf{b}^-|$ annehmen, werden die Komponenten von $\text{Top}(X)$ von den Standardbasisvektoren \mathbf{e}_j des \mathbb{A}^n aufgespannt, wobei j aus den maximalen Teilmengen $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ ist, sodass $\sum_{i \notin J} \mathbf{b}_i^- \geq |\mathbf{b}^+|$ gilt. Es wird also für die Explosion des \mathbb{A}^n als Zentrum ein Koordinatenunterraum $Z_\Delta \subseteq \text{Top}(X)$ gewählt, wobei $\Delta \subseteq \{1, \dots, n\}$. Die Karten der Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ werden mit U_{σ_j} , $j \in \Delta$ bezeichnet. Die σ_j bilden dann einen Fächer Σ . Es bezeichne $\mathbf{x}^{\mathbf{b}_{\sigma_j}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}_{\sigma_j}^-}$ die strikt transformierte f' in der j -ten Karte. Sei $|\mathbf{b}_{\sigma_j}^+| = \sum_{i=1}^n (b_{\sigma_j}^+)_i$ und entsprechend $|\mathbf{b}_{\sigma_j}^-| = \sum_{i=1}^n (b_{\sigma_j}^-)_i$ für alle $\sigma_j \in \Sigma$. Die Invariante wird dann als der Vektor

$$(d_{\sigma_j}, \Omega_{\sigma_j}) \in \mathbb{N}^2$$

definiert, wobei $d_{\sigma_j} = \min\{|\mathbf{b}_{\sigma_j}^+|, |\mathbf{b}_{\sigma_j}^-|\}$ die Ordnung von f' und $\Omega_{\sigma_j} = \max\{|\mathbf{b}_{\sigma_j}^+|, |\mathbf{b}_{\sigma_j}^-|\}$ der Grad von f' sind.

Der Hauptunterschied zu unserem Algorithmus ist, dass hier öfters in Zentren Z_Δ von kleinerer Dimension aufgeblasen wird. Es wäre interessant, zu untersuchen, welcher Algorithmus weniger Schritte benötigt, um ans Ziel zu kommen.

Kapitel 3

Explosionen in monomialen Idealen

3.1 Symmetrien

Das Problem

Sei $X = V(f)$ mit $f = \mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-}$ wieder eine singuläre affine, nicht notwendig normale, torische Hyperfläche im \mathbb{A}_K^n . Wie schon vorher sagen wir, dass X *aufgelöst* ist, wenn $\mathbf{b} = \mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^- \in \pm\mathbb{N}^n$ gilt. Der Algorithmus im vorigen Abschnitt löst zwar eine Singularität einer affinen torischen Hyperfläche X , die in einen \mathbb{A}^n eingebettet ist, in endlich vielen Schritten auf, doch er liefert keine äquivariante Auflösung. Unter einer eingebetteten *äquivarianten Auflösung* von X verstehen wir einen eigentlichen birationalen Morphismus $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ mit $\tilde{\mathbb{A}}^n$ glatt, sodass die total transformierte $X^* = \pi^{-1}(X)$ von X aufgelöst ist und die Abbildung $\pi|_{X^*} : X^* \rightarrow X$ ein Isomorphismus über den glatten Punkten von X ist, der alle Symmetrien von X erhält. Genauer: Jeder Automorphismus von X wird zu einem Automorphismus von X^* geliftet. Der obige Morphismus π ist entweder durch torische Modifikationen oder durch eine Explosion oder eine Folge von Explosionen mit Zentren monomiale Ideale definiert. Das Zentrum soll also invariant bzgl. der Operation einer Symmetriegruppe G aus S_n auf \mathbb{A}^n bzw. X sein. G operiert auf \mathbb{A}^n bzw. X durch Permutation der Koordinaten.

Dass ein $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ überhaupt existiert, ist durch Hironaka's Satz [Hi] gesichert (allerdings nur für Körper K der Charakteristik 0!). Villamayor [Vi] zeigte, dass es dann sogar eine äquivariante eingebettete Auflösung gibt. Für die klassische torische Auflösung, siehe z.B. [KKMS], wird konvexe Geometrie verwendet. Dabei löst man die Singularitäten einer torischen Varietät durch reguläre Unterteilungen der zugehörigen Fächer und Kegel auf. Diese Auflösung ist nicht äquivariant und auch nicht eingebettet.

Wir werden uns an Explosionen in monomialen Idealen halten und dabei von folgender Überlegung ausgehen: Wie schon gezeigt, ist der singuläre Ort $\text{Sing}(X)$ einer affinen torischen Hyperfläche $X = V(f)$ im \mathbb{A}^n immer eine Vereinigung von Koordinatenunterräumen des \mathbb{A}^n . Betrachte wieder den Toplocus $\text{Top}(X)$, d.h., den Ort, an dem die Ordnung von f maximal ist. Der Toplocus ist eine Untervarietät von X , die i.A. aus mehreren Komponenten besteht. Im vorhergehenden Algorithmus musste man immer

eine dieser Komponenten als Zentrum der Explosion auswählen, und hat dadurch etwaige Symmetrien von X zerstört. Wenn man nun als Zentrum einer Explosion aber mehrere Komponenten wählen würde, so könnte man die Symmetrien von X erhalten.

Wir werden nun Explosionen in allgemeinen monomialen Idealen betrachten: normalerweise lässt man nur glatte Zentren zu, doch wir werden auch singuläre bzw. nichtreduzierte Zentren betrachten. Dies hat allerdings zur Folge, dass i. A. die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ des umgebenden affinen Raumes in einigen Karten singulär ist. Dann kann natürlich von einer eingebetteten Auflösung von $X \subseteq \mathbb{A}^n$ keine Rede mehr sein!

Monomiale Kurven im \mathbb{A}^2 werden durch Explosionen mit Zentrum der Nullpunkt, definiert durch das maximale Ideal (x, y) , immer in endlich vielen Schritten aufgelöst. Somit ist das Zentrum eindeutig bestimmt, und wir haben keine Symmetrien zu beachten.

Wir illustrieren die Problematik am ersten nichttrivialen Beispiel einer torischen Fläche im affinen dreidimensionalen Raum. Sei $X = V(f)$, wobei $f = x^a - y^b z^c$. Die einzige Symmetrie tritt auf, wenn $b = c$ gilt. Sie ist durch die Permutation $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ gegeben. Diese Abbildung ist ein Automorphismus von X und erhält das Binom f . Sei $2 \leq a \leq b = c$, dann ist der singuläre Ort von X die Vereinigung der y - und der z -Achse. Wir versuchen nun, ein Zentrum für die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ so zu wählen, dass diese Symmetrie auch in $\tilde{\mathbb{A}}^3$ erhalten bleibt. Das einzige glatte invariante Zentrum ist der Nullpunkt mit dem Ideal (x, y, z) . Hier ist die Gleichung von f' in der y - bzw. z -Karte gegeben durch $x^a - y^{2b-a} z^b$ bzw. $x^a - y^b z^{2b-a}$. Wir können also keine Verbesserung der Singularität feststellen. Im Gegenteil scheint das Achsenkreuz in beiden Karten noch singulärer geworden zu sein. Wählen wir als Zentrum (x, yz) , die reduzierte Vereinigung der y - und der z -Achse, bleibt die Symmetrie erhalten. Wie wir später ausführlicher berechnen, ist aber die Explosion von \mathbb{A}^3 in (x, yz) singulär. Wir werden also versuchen, das Achsenkreuz durch ein invariantes, nicht-reduziertes Ideal zu beschreiben, sodass die Explosion von \mathbb{A}^3 in diesem Ideal glatt ist.

Im Folgenden werden somit Explosionen des \mathbb{A}^n mit Zentren monomiale Ideale betrachtet. Es wird ein Kriterium der Glattheit einer Explosion in einem beliebigen monomialen Ideal angegeben. Dafür benötigen wir einige Konzepte aus der konvexen Geometrie. Insbesondere werden wir jedem von uns betrachteten Ideal seinen *Newtonpolyeder* zuordnen. Dann betrachten wir Methoden, um singuläre Explosionen zu "glätten": wir behandeln den Ansatz von Rosenberg [Ro], bei dem das Ideal durch ein anderes monomiales Ideal mit demselben Radikal ersetzt wird.

Weiters wird ein völlig anderer Zugang von De Concini und Procesi [DP] vorgestellt: Hier geht man von einer Vereinigung von Koordinatenunterräumen U_i des \mathbb{A}^n aus (*Arrangements*). Dann sind die zugehörigen Ideale \mathcal{S}_i Koordinatenideale. Wenn man als Zentrum der Explosion des \mathbb{A}^n das Produkt der \mathcal{S}_i wählt, so ist die Explosion glatt, wenn die U_i eine *bauchige Menge* bilden. In [DP] wird dies für beliebige Arrangements von Unterräumen bewiesen, wir werden die Glattheit für Koordinatenunterräume mit unserem Newtonpolyederkriterium zeigen.

Wenn man ein monomiales Ideal gefunden hat, sodass die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ in allen Karten glatt ist, ist es jedoch sehr schwierig, eine Verbesserung der Singularität von X zu messen: i.A. werden nämlich die von uns betrachteten Invarianten größer.

Explosionen in nichtreduzierten monomialen Idealen

Wir haben bis jetzt nur Explosionen des \mathbb{A}^n mit Zentren Koordinatenideale $\mathcal{J} = (x_i : i \in I)$, mit $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ und $|I| \geq 2$ betrachtet. Dann ist $\tilde{\mathbb{A}}^n$ glatt. Man kann die jeweiligen Kartenausdrücke $\pi_{x_i} : (\tilde{\mathbb{A}}^n)_{x_i} \rightarrow \mathbb{A}^n$ leicht berechnen. Es bezeichne $(\tilde{\mathbb{A}}^n)_{x_i}$ die i -te affine Karte von $\tilde{\mathbb{A}}^n$. Bekanntlich ist

$$\pi_{x_i} : \pi_{x_i}^{-1}(\mathbb{A}^n \setminus V(\mathcal{J})) \rightarrow \mathbb{A}^n \setminus V(\mathcal{J})$$

ein Isomorphismus. Wir betrachten nun eine Explosion in einem *nichtreduzierten* Zentrum:

Beispiel 12. (1) Sei $\mathcal{J} = (x, y)^2 = (x^2, xy, y^2)$ der dicke Nullpunkt im \mathbb{A}^2 . Wir betrachten die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ mit Zentrum \mathcal{J} . In Abschnitt 2.1 haben wir gezeigt, wie man die Koordinatenringe der jeweiligen affinen Karten berechnen kann. In diesem Fall besitzt das Ideal \mathcal{J} drei Erzeuger, wir erhalten also drei affine Karten, die die Explosion von \mathbb{A}^2 überdecken. In den Karten x^2 bzw. y^2 sind die zugehörigen Koordinatenringe gegeben durch $K[x, y, xy/x^2, y^2/x^2] = K[x, y/x]$ bzw. $K[x, y, x^2/y^2, xy/y^2] = K[x/y, y]$. Diese beiden Karten stimmen mit der x - bzw. y -Karte des reduzierten Ideals des Nullpunkts überein. In der Karte xy erhalten wir $K[x, y, x/y, y/x]$. Dann ist $\text{Spec}(K[x, y, x/y, y/x]) \subsetneq \mathbb{A}^2$ eine offene Teilmenge des affinen zweidimensionalen Raums. Diese Karte wird von den zwei benachbarten Karten überdeckt. Man sieht auch, dass die Rees-Algebren von (x^2, xy, y^2) und dem reduzierten Ideal (x, y) übereinstimmen.

(2) Sei $\mathcal{J} = (yz, x)$ das reduzierte Ideal des Koordinatenkreuzes yz -Achse im \mathbb{A}^3 und sei $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ die Explosion des \mathbb{A}^3 in \mathcal{J} . Analog zum vorigen Beispiel berechnen wir zuerst die yz -Karte und erhalten den zugehörigen Koordinatenring $K[x, y, z, x/yz] = K[x/yz, y, z]$ und die assoziierte Abbildung

$$\pi_{yz} : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3 : (x, y, z) \mapsto (xyz, y, z).$$

Hier ist $\text{Spec}(K[x/yz, y, z])$ wieder isomorph zum \mathbb{A}^3 und daher glatt. In der x -Karte jedoch ist der Koordinatenring der Explosion gleich

$$K[x, y, z, yz/x] \cong K[x, y, z, w]/(xw - yz).$$

Hier ist $\tilde{\mathbb{A}}^3 = \text{Spec}(K[x, y, z, w]/(xw - yz))$ eine dreidimensionale torische Varietät im \mathbb{A}^4 mit isolierter Singularität im Nullpunkt. Wir sehen also, dass die Explosion von \mathbb{A}^3 in \mathcal{J} singulär ist.

Allgemein gilt: Sei \mathcal{J} ein monomiales Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$ und sei $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{J} . Dann ist $\tilde{\mathbb{A}}^n$ eine torische Varietät, die i.A. singulär ist. Sei $\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A\}$, wobei A in \mathbb{N}^n endlich ist, ein beliebiges monomiales Erzeugendensystem von \mathcal{J} . Sei

$$U_{\mathbf{a}} := \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_n][\mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}, \mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\}]).$$

Dann wird $\tilde{\mathbb{A}}^n$ von den affinen torischen Varietäten $U_{\mathbf{a}} \subseteq \mathbb{A}^n$ überdeckt.

Wir können dies auch mit Hilfe von konvexer Geometrie formulieren: $\tilde{\mathbb{A}}^n$ ist eine torische Varietät, gegeben durch einen Fächer Σ in einem Gitter N . Die affinen Karten $U_{\mathbf{a}}$ entsprechen affinen torischen Varietäten, die jeweils durch einen Kegel $\sigma \in \Sigma$ definiert werden. Genauer: Jedem Erzeuger $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ wird ein Kegel $\sigma(\mathbf{a})$ zugeordnet. Beachte

dabei, dass $\tilde{\mathbb{A}}^n$ nicht notwendig normal ist, also auch die zugehörigen affinen $U_{\mathbf{a}}$ nicht notwendig normale affine torische Varietäten sind. Wenn, wie im obigen Beispiel (1), eine Karte $U_{\mathbf{a}}$ eine offene Teilmenge von zwei anderen Karten $U_{\mathbf{b}}$ und $U_{\mathbf{c}}$ ist, so gilt: der Kegel $\sigma(\mathbf{c})$ ist gegeben als $\sigma(\mathbf{a}) \cap \sigma(\mathbf{b})$ und man kann entsprechend die zugehörigen affinen torischen Varietäten $U_{\mathbf{a}}$ und $U_{\mathbf{b}}$ entlang $U_{\mathbf{c}}$ zusammenkleben. Durch diese Prozedur erhält man schließlich eine Überdeckung von $\tilde{\mathbb{A}}^n$.

3.2 Newtonpolyeder und Explosionen

Wir betrachten ein monomiales Ideal $\mathcal{I} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ in $K[x_1, \dots, x_n] = K[\mathbf{x}]$, wobei A eine endliche Menge in \mathbb{N}^n ist. Wir gehen der Frage nach, wann die Explosion des affinen Raumes \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{I} glatt ist. Dazu werden wir ein geometrisches Kriterium angeben. Zu diesem Zweck betrachten wir das *Newtonpolyeder* von \mathcal{I} . Dann entsprechen die Exponentenvektoren \mathbf{a} , wobei $\mathbf{a} \in A$, Ecken bzw. inneren Punkten dieses Polyeders. Wir werden die Korrespondenz zwischen den Erzeugern des Ideals zu Punkten im zugehörigen Newtonpolyeder genau beschreiben. Weiters werden wir jedem Punkt des Newtonpolyeders einen Kegel zuordnen, den *Idealtangentenkegel*. Wir werden zeigen, wie man an den Idealtangentenkegeln der $\mathbf{a} \in A$ die Glattheit der Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ mit Zentrum \mathcal{I} ablesen kann.

Einige Begriffe aus der konvexen Geometrie

Wir haben schon in Kapitel 1 einige Objekte der konvexen Geometrie eingeführt, allerdings in einem sehr allgemeinen Kontext. Wir werden im Folgenden alle Objekte im Vektorraum \mathbb{R}^n bzw. im Untergitter $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}^n$ und im Untermonoid $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}^n \cap \mathbb{R}^n$ definieren. Es gelte $\mathbb{N} := \mathbb{N}_{\geq 0}$.

Zur Erinnerung: Ein (*positiver*) *reeller Kegel* K ist eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^n , sodass jede nichtnegative Linearkombination von Elementen von K wieder in K liegt. Es sei $\mathbb{R}_+^n := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : v_i \geq 0\}$. Falls es Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $K = \{\sum_{i=1}^l \lambda_i \mathbf{v}_i : \lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}_+\}$, dann nennt man K den von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ erzeugten *polyedrischen Kegel*. Wir werden einen derartigen Kegel im Weiteren mit $K = \mathbb{R}_+(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ bezeichnen.

Ein polyedrischer Kegel heißt *rational*, wenn alle Erzeuger \mathbf{v}_i rationale Koordinaten haben. Wir können dann durch Erweitern mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner annehmen, dass diese Vektoren ganzzahlige Koordinaten haben. Wir nennen einen Erzeuger \mathbf{v}_i in \mathbb{Z}^n *primitiv*, wenn seine Koordinaten relativ prim zueinander sind.

Die *Dimension* einer Teilmenge von \mathbb{R}^n ist die Dimension ihrer affinen Hülle. Daher ist die Dimension von $\mathbb{R}_+(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)$ die Dimension des von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ aufgespannten linearen Raumes. Ein polyedrischer Kegel mit Erzeugern $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ heißt *simplizial*, wenn diese l Erzeuger \mathbb{R} -linear unabhängig sind. Wenn zusätzlich das l -dimensionale Volumen des von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ aufgespannten Parallelotops 1 beträgt, spricht man von einem *unimodularen Kegel*.

Die Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen *Gitterpunkte*. Aus einem beliebigen positiven reellen Kegel K erhalten wir den zugehörigen *Gitterkegel* $K \cap \mathbb{Z}^n$. Wenn K ein rationaler polyedrischer Kegel ist, so ist nach Gordan's Lemma (Satz 3) auch $K \cap \mathbb{Z}^n$ endlich erzeugt über \mathbb{Z} und besitzt ein eindeutiges minimales Erzeugendensystem $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l \in \mathbb{Z}^n$.

Die \mathbf{x}_i sind primitive Vektoren.

Seien $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in \mathbb{R}^n$. Eine *konvexe Linearkombination* von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ ist eine endliche nichtnegative \mathbb{R} -Linearkombination

$$\sum_{i=1}^l c_i \mathbf{v}_i \text{ mit } c_i \geq 0 \text{ für alle } i, \text{ und } \sum_{i=1}^l c_i = 1.$$

Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n heißt *konvex*, wenn für je zwei Elemente \mathbf{v}, \mathbf{w} von M auch die Strecke von \mathbf{v} nach \mathbf{w} in M enthalten ist. Die *konvexe Hülle* $\text{conv}(N)$ einer Teilmenge N von \mathbb{R}^n ist die Menge aller konvexen Linearkombinationen von Elementen von N . Für zwei Teilmengen A, B von \mathbb{R}^n gilt $\text{conv}(A + B) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$.

Ein *Polyeder* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen in \mathbb{R}^n . Ein *Polytop* ist ein beschränktes Polyeder. Äquivalent dazu ist jedes Polytop die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten im \mathbb{R}^n . Die *Dimension* eines Polyeders bzw. Polytops P ist wieder die Dimension seiner affinen Hülle. Ein Element \mathbf{e} von P heißt *Ecke* von P , wenn es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$P \subseteq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{v}) \leq d\} \text{ und } f^{-1}(d) \cap P = \{\mathbf{e}\}.$$

Das heißt: es gibt eine affine Hyperebene $H_d = f^{-1}(d)$, deren Schnitt mit P die Ecke \mathbf{e} liefert, sodass P auf einer Seite von H_d liegt.

Allgemein definiert man: eine Teilmenge Q von P ist eine m -dimensionale *Seite* von P , wenn es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt und ein $d \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$P \subseteq \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{v}) \leq d\} \text{ und } f^{-1}(d) \cap P = Q,$$

und außerdem die affine Hülle von Q m -dimensional ist. Dann sind die Ecken von P die 0-dimensionalen Seiten von P . Weiters heißen die 1-dimensionalen Seiten von P *Kanten* und $n - 1$ -dimensionale Seiten nennt man *Facetten* von P . Zwei Ecken von P sind *benachbart*, wenn die Strecke zwischen ihnen eine Kante von P ist. Wir sagen, dass \mathbf{v} im *Inneren* von P ist bzw. dass \mathbf{v} ein *innerer Punkt* von P ist, wenn es eine offene Kugel B (bzgl. der Standardmetrik auf \mathbb{R}^n) gibt, sodass $\mathbf{v} \in B \subseteq P$ gilt.

Polyedrische Kegel sind spezielle Polyeder. Daher gelten die Definitionen von Ecken, Kanten, Seiten und Facetten auch für diese Kegel.

Seien K und L beliebige Mengen im \mathbb{R}^n . Dann heißt

$$K + L := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in L\}$$

die *Minkowski Summe* oder einfach nur die *Summe* von K und L . Seien speziell K und L konvexe Mengen in \mathbb{R}^n , sodass der Durchschnitt ihrer affinen Hüllen ein Punkt ist. Dann nennen wir $K + L$ die *direkte Summe* $K \oplus L$ von K und L und es gilt: $K \oplus L$ ist isomorph zu $K \times L \subseteq \mathbb{R}^{2n}$.

Man kann zeigen, dass jedes Polyeder P die Summe der konvexen Hülle M einer endlichen Teilmenge des \mathbb{R}^n (= das von M erzeugte Polytop) und eines endlich erzeugten Kegels ist. Jede Ecke von P ist ein Element der endlichen Menge M . Wir werden nur unbeschränkte Polyeder betrachten, daher führen wir zusätzlich den Begriff der unendlich fernen Ecken eines Polyeders ein.

Definition. Sei $P = \text{conv}(M) + \mathbb{R}_+ \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich, ein unbeschränktes Polyeder. Für alle Ecken \mathbf{m} von $\text{conv}(M)$ bezeichnen wir den Strahl $\mathbf{m} + \mathbb{R}_+ \mathbf{v}_i$ als *unendlich ferne Ecke* von P in Richtung \mathbf{v}_i , falls $\mathbf{m} + \mathbb{R}_+ \mathbf{v}_i$ eine Kante von P ist.

Die *positive konvexe Hülle* einer Teilmenge M von \mathbb{R}^n ist die konvexe Hülle der Minkowski Summe von M mit \mathbb{R}_+^n , geschrieben $\text{conv}(M + \mathbb{R}_+^n)$.

Wir haben schon früher den Träger eines Polynoms $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in K[\mathbf{x}]$ definiert. Es gilt $\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_\alpha \neq 0\}$. Der *Träger eines monomialen Ideals* \mathcal{I} ist die Menge aller Exponentenvektoren von Monomen von \mathcal{I} , geschrieben

$$\text{supp}(\mathcal{I}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n : \mathbf{x}^\mathbf{a} \in \mathcal{I}\}.$$

Seine konvexe Hülle $\text{conv}(\text{supp}(\mathcal{I}))$ heißt das *Newtonpolyeder* N von \mathcal{I} . Wir werden es auch mit $N(\mathcal{I})$ bezeichnen. Äquivalent dazu ist für ein Erzeugendensystem $\mathbf{x}^\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in A$ endlich, von \mathcal{I} das Newtonpolyeder definiert als die positive konvexe Hülle $\text{conv}(A + \mathbb{R}_+^n)$.

Ein Ideal \mathcal{I} heißt *ganz abgeschlossen*, wenn \mathcal{I} gleich seinem ganzen Abschluss ist. Ein monomiales Ideal $\mathcal{I} = (\mathbf{x}^\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A)$ ist ganz abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}_+ \langle \mathbf{a} \in A \rangle \cap \mathbb{Z}^n$ endlich erzeugt ist. Für jedes monomiale \mathcal{I} gilt $\text{supp}(\mathcal{I}) \subseteq N(\mathcal{I}) \cap \mathbb{Z}^n$, mit Gleichheit genau dann, wenn \mathcal{I} ganz abgeschlossen ist (siehe Satz 4 oder [Ei, Ex. 4.23]).

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Dann heißt für $\mathbf{v} \in P$ der positive reelle Kegel $T_\mathbf{v}(P)$, der von $P - \mathbf{v} := \{\mathbf{p} - \mathbf{v} : \mathbf{p} \in P\}$ erzeugt wird, der (*reelle*) *Tangentenkegel* zu P in \mathbf{v} . Dieser Kegel ist polyedrisch. Wir können ein (nicht notwendig minimales) Erzeugendensystem angeben: schreibe dazu wie oben $P = \text{conv}(M) + \mathbb{R}_+ \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ mit M endlich. Der reelle Tangentenkegel zu P in \mathbf{v} ist dann der Kegel, der von allen $\mathbf{m} - \mathbf{v}$ und den $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ erzeugt wird. Falls \mathbf{v} eine Ecke von P ist, so wird der zugehörige $T_\mathbf{v}(P)$ erzeugt von den Kanten von P die von \mathbf{v} ausgehen. Wenn \mathbf{v} im Inneren von P liegt, dann ist $T_\mathbf{v}(P) = \mathbb{R}^n$ (wobei wir hier immer annehmen, dass $\dim(P) = n$).

Definition. Es sei für Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in \mathbb{R}^n$ die Menge $\{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_l \mathbf{v}_l : \lambda_i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \langle \mathbf{v}_i \rangle$ das \mathbb{N} -Erzeugnis der \mathbf{v}_i . Speziell für ein monomiales Ideal $\mathcal{I} = (\mathbf{x}^\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A)$ sei

$$IT_\mathbf{a}(\mathcal{I}) := \mathbb{N} \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a} : \mathbf{a}' \neq \mathbf{a} \in A \rangle,$$

der *Idealtangentenkegel zum Monom $\mathbf{x}^\mathbf{a}$* . Dies ist kein reeller ‘‘Kegel’’, sondern das von den \mathbf{v}_i erzeugte Monoid. Wie bei reellen Kegeln definieren wir Facetten, Seiten, und Ecken. Ebenso nennen wir $IT_\mathbf{a}(\mathcal{I})$ *spitz* genau dann, wenn $IT_\mathbf{a}(\mathcal{I}) \cap (-IT_\mathbf{a}(\mathcal{I})) = \{0\}$. Ein *minimales Erzeugendensystem* von $IT_\mathbf{a}(\mathcal{I})$ ist eine Menge von Vektoren in \mathbb{Z}^n , die $IT_\mathbf{a}(\mathcal{I})$ erzeugen, so dass kein Element eine \mathbb{N} -Linearkombination der anderen Elemente ist. Wir nennen ein Element des minimalen Erzeugendensystems einen *minimalen Erzeuger* von $IT_\mathbf{a}(\mathcal{I})$.

Wir werden später noch weitere Begriffe von reellen Kegeln übernehmen. Außerdem gilt für einen Punkt \mathbf{a} im Newtonpolyeder N von \mathcal{I} : der Gitterkegel $T_\mathbf{a}(N) \cap \mathbb{Z}^n$ enthält den Idealtangentenkegel $IT_\mathbf{a}(\mathcal{I})$. Der Idealtangentenkegel gibt uns also Auskunft über die Gestalt des Newtonpolyeders von \mathcal{I} *in der Nähe* einer Ecke bzw. eines ganzzahligen Punktes von N .

Beispiel 13. Sei $\mathcal{J} = (x^3, xy^2, y^3)$. Das zugehörige Newtonpolyeder $N = N(\mathcal{J})$ ist dann

$$N = \text{conv}(\{(3, 0), (1, 2), (0, 3)\} + \mathbb{R}_+^2).$$

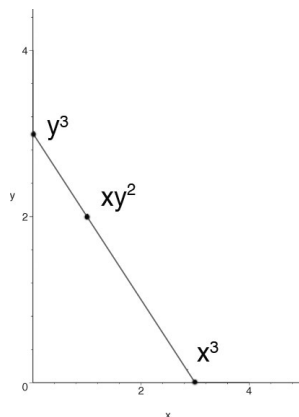


Abb. 4: Das Newtonpolyeder N von \mathcal{J} .

Der Tangentenkegel zu N in der Ecke $(3, 0)$ ist gegeben durch $T_{(3,0)}(N) = \mathbb{R}_+\langle(-2, 2), (-3, 3), (1, 0), (0, 1)\rangle$, wobei die letzten beiden Erzeuger die unendlich fernen Ecken sind. Wir sind zuerst am Gitterkegel $T_{(3,0)}(N) \cap \mathbb{Z}^2$ interessiert: dieser Kegel enthält alle ganzzahligen Vektoren der Form $\mathbb{R}_+\langle(-2, 2), (-3, 3), (1, 0), (0, 1)\rangle \cap \mathbb{Z}^2$. Wie man leicht sieht, besitzt er das minimale \mathbb{Z} -Erzeugendensystem $(1, 0), (-1, 1)$. Dies sind gerade die beiden primitiven Kantenvektoren zur Ecke $(3, 0)$. Der Idealtangentenkegel zur selben Ecke ist nach Definition $IT_{(3,0)}(\mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle(1, 0), (0, 1), (-2, 2), (-3, 3)\rangle$. Da wir hier nur \mathbb{N} -Linearkombinationen zur Verfügung haben, dürfen wir nicht einfach die primitiven Vektoren als Erzeuger verwenden. Es gilt also: $IT_{(3,0)}(\mathcal{J}) \subsetneq (T_{(3,0)}(N) \cap \mathbb{Z}^2)$.

Für die Ecke $(0, 3)$ ist jedoch $IT_{(0,3)}(\mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle(3, -3), (1, -1), (1, 0), (0, 1)\rangle$. Man findet leicht das minimale Erzeugendensystem $(1, -1), (0, 1)$ und die beiden Kegel $IT_{(0,3)}(\mathcal{J})$ und $T_{(0,3)}(N) \cap \mathbb{Z}^2$ stimmen überein.

Idealtangentenkegel im Newtonpolyeder und Explosionen

Wir wollen die Explosion von \mathbb{A}^n im monomialen Ideal $\mathcal{J} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ in Zusammenhang mit dem Newtonpolyeder $N := N(\mathcal{J})$ bringen.

Die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ von \mathbb{A}^n in \mathcal{J} ist bekanntlich $\text{Proj}(K[\mathbf{x}][t, \mathcal{J}])$, daher wird $\tilde{\mathbb{A}}^n$ überdeckt von

$$U_{\mathbf{a}} = \text{Spec}(K[x_1, \dots, x_n][\mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}} : \mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\}]).$$

Wir nennen $U_{\mathbf{a}}$ für $\mathbf{a} \in A$ die \mathbf{a} -Karte von $\tilde{\mathbb{A}}^n$. Die Explosion ist glatt genau dann, wenn sie in jeder Karte glatt ist. Da $\tilde{\mathbb{A}}^n$ eine torische Varietät ist, gilt: falls die \mathbf{a} -Karte glatt ist, so ist sie entweder isomorph zu einem \mathbb{A}^n oder zu einer offenen Teilmenge des n -dimensionalen affinen Raums.

Im Newtonpolyeder N , speziell an den Idealtangentenkegeln $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$, kann man alle Eigenschaften der Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ ablesen. Für unser folgendes Glattheitskriterium benötigen wir noch die Begriffe simplizial und unimodular für Idealtangentenkegel. Um sie sinnvoll definieren zu können, zeigen wir zuerst folgendes

Lemma 1. Sei $\mathbb{N}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle = IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ der Idealtangentenkegel von N in einem Punkt \mathbf{a} . Falls der Idealtangentenkegel spitz ist, so besitzt er genau ein minimales Erzeugendensystem.

Beweis. Sei $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ spitz. Angenommen, er besäße zwei verschiedene minimale Erzeugendensysteme $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ bzw. $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$, wobei o.B.d.A. $\mathbf{v}_1 \notin \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$. Da die \mathbf{v}_i ein Erzeugendensystem von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ bilden, kann man jedes \mathbf{w}_j als \mathbb{N} -Linearkombination

$$\mathbf{w}_j = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$ schreiben. Da auch die \mathbf{w}_j ein Erzeugendensystem sind, können wir umgekehrt $\mathbf{v}_1 = \sum_j \beta_j \mathbf{w}_j = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{v}_i$ schreiben. Dann muss aber der Koeffizient $\sum_j \alpha_i \beta_j$ von \mathbf{v}_1 in der letzten Gleichung größer gleich 1 sein, da sonst $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{N}\langle \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$. Das wäre ein Widerspruch zum minimalen Erzeugendensystem. Weiters muss $\sum_j \alpha_i \beta_j \leq 1$ gelten, da sonst 0 eine nichttriviale \mathbb{N} -Linearkombination der \mathbf{v}_i wäre, was einen Widerspruch zu $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ spitz liefern würde. Somit bleibt als einzige Möglichkeit $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1$ und $\beta_j = 0$ für alle restlichen j . Dann folgt aber aus der Gleichung

$$\mathbf{v}_1 = \sum_j \beta_j \mathbf{w}_j = \beta_1 \mathbf{w}_1,$$

dass $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ gelten muss. Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbf{v}_1 \notin \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$! \square

Wir nennen nun einen spitzen Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ *simplizial*, wenn das minimale Erzeugendensystem von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ aus genau n Vektoren in \mathbb{Z}^n besteht. $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ heißt *unimodular*, falls zusätzlich das n -dimensionale Volumen der minimalen Erzeuger gleich 1 ist.

Sei $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ mit $l \geq n$ und sei $K[IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})] = K[\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_l}]$ die von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ erzeugte monomiale Algebra mit $K[IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})] \subseteq K[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$. Man sieht sofort, dass $K[IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})]$ der Koordinatenring der \mathbf{a} -Karte von $\tilde{\mathbb{A}}^n$ ist. Betrachte nun, analog zu Kapitel 1, den Monoidhomomorphismus (für spitze Idealtangentenkegel: Isomorphismus)

$$\theta : IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S}) \rightarrow K[IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})], \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}^{\mathbf{u}}.$$

Via θ kann man $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ mit $K[IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})]$ identifizieren, wir können somit in der zu $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ gehörenden monomialen Algebra arbeiten. Ebenso wie in Kapitel 1 betrachten wir den Monoidhomomorphismus $\pi : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{Z}^n, \mathbf{b} \mapsto \sum_{i=1}^l b_i \mathbf{v}_i$. Daraus erhalten wir einen Homomorphismus der monomialen Algebren

$$\hat{\pi} : K[t_1, \dots, t_l] \rightarrow K[IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})], t_i \mapsto \mathbf{x}^{\mathbf{v}_i}.$$

Wie bereits erwähnt, erhält man so die Beschreibung der \mathbf{a} -Karte von $\tilde{\mathbb{A}}^n$ als torische Varietät. Das zugehörige torische Ideal wird erzeugt von Binomen $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} - \mathbf{x}^{\mathbf{w}}$, mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$. Die linearen Relationen der Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ entsprechen also polynomialen Relationen in $K[\mathbf{x}]$.

Jetzt bringen wir das Newtonpolyeder N von $\mathcal{S} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ zu den Koordinatenringen der affinen Karten der Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{S} in Beziehung. Nach Definition des Newtonpolyeders bilden die Ecken von N eine Teilmenge von A . Die restlichen Elemente von A liegen entweder im Inneren oder sind in Seiten von N enthalten. Die Exponenten $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$, wobei $\mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$, der Erzeuger des Koordinatenrings der \mathbf{a} -Karte der Explosion entsprechen im Polyeder N den Verbindungsvektoren von

\mathbf{a} nach \mathbf{a}' . Die Erzeuger x_1, \dots, x_n von $K[x_1, \dots, x_n, \mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}} : \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}]$ entsprechen im Newtonpolyeder den n Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. Diese Erzeuger kommen von unendlich fernen Ecken $\mathbf{a} + \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_i$. Daher ist jeder Idealtangentenkegel n -dimensional und besitzt das (nicht notwendig minimale) Erzeugendensystem $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a} \in A$. Wenn $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ spitz ist, kann man das eindeutige minimale Erzeugendensystem $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ mit $l \geq n$ berechnen. Wir werden einen Erzeuger \mathbf{v} von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ *notwendig* bzw. *minimal* nennen, wenn \mathbf{v} ein Element des minimalen Erzeugendensystems ist. Sonst heißt \mathbf{v} *überflüssig* bzw. *redundant*. Falls \mathbf{v} ein überflüssiger Erzeuger ist, erfüllt er eine Relation

$$\mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i, \text{ mit } \mathbf{v}_i \neq \mathbf{v} \text{ und } \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet, dass \mathbf{v} im Inneren bzw. in einer Seite des Idealtangentenkegels liegt. Dann ist der Punkt $\mathbf{v} + \mathbf{a}$ im Inneren bzw. in einer Seite des Newtonpolyeders. Im Koordinatenring $K[x_1, \dots, x_n, \mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}} : \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}] = K[\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_l}]$ lautet die Relation entsprechend

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} = \mathbf{x}^{\alpha_1 \mathbf{v}_1} \dots \mathbf{x}^{\alpha_l \mathbf{v}_l}.$$

Wir werden sehen, dass der Idealtangentenkegel einer *Ecke* \mathbf{a} von N immer spitz ist. Weiters gilt: wenn $\mathbf{a} \in A$ keine Ecke von N ist, so ist die zugehörige \mathbf{a} -Karte eine offene Teilmenge der Karten der benachbarten Ecken.

Beispiele

Beispiel 14. Sei $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ die Explosion des \mathbb{A}^3 mit Zentrum $\mathcal{J} = (x, y, z)$. Dann gilt $\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i$. Das Newtonpolyeder $N = N(\mathcal{J})$ ist daher $\text{conv}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} + \mathbb{R}_+^3)$. Beachte: hier sind alle \mathbf{a}_i Ecken von P , zusätzlich sind die Strahlen $\mathbf{a}_i + \mathbb{R}_+ \mathbf{e}_i$ die drei unendlich fernen Ecken. Die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ in \mathcal{J} liefert bekanntlich drei Karten: in der x -Karte erhalten wir die Koordinatenalgebra $K[x, y, z, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}]$ und entsprechend $IT_{\mathbf{a}_1}(\mathcal{J}) =_{\mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \rangle$. $IT_{\mathbf{a}_1}(\mathcal{J})$ ist simplizial und unimodular. Die anderen beiden Karten sind symmetrisch bzgl. $x \leftrightarrow y$ bzw. $x \leftrightarrow z$. Daher ist die Explosion glatt. Wir bemerken, dass $IT_{\mathbf{a}_i}(\mathcal{J})$ mit $T_{\mathbf{a}_i}(N) \cap \mathbb{Z}^3$ übereinstimmt und genau 3 Erzeuger hat (zwei davon entsprechen den Strecken von \mathbf{a}_i zu $\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k$, mit $i \neq j \neq k$. Der dritte, \mathbf{e}_i , entspricht einer unendlich fernen Nachbarecke). Außerdem gilt $\det(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i) = 1$, d.h., die Erzeuger des Idealtangentenkegels bilden sogar eine \mathbb{Z} -Basis von $IT_{\mathbf{a}_i}(\mathcal{J})$. Alle Kegel $IT_{\mathbf{a}_i}(\mathcal{J})$ für $i = 1, 2, 3$ sind simplizial und unimodular und somit ist die Explosion von \mathbb{A}^3 in \mathcal{J} glatt.

Beispiel 15. Sei jetzt $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ die Explosion von \mathbb{A}^2 im *dicken* Nullpunkt $\mathcal{J} = (x, y)^2 = (x^2, y^2, xy)$. Dann gilt $\mathbf{a}_1 = (2, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 2), \mathbf{a}_3 = (1, 1)$ und wir erhalten diesmal drei Karten. Im Newtonpolyeder sind die entsprechenden drei Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}_1}(\mathcal{J}) =_{\mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \rangle, IT_{\mathbf{a}_2}(\mathcal{J}) =_{\mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle$ bzw. $IT_{\mathbf{a}_3}(\mathcal{J}) =_{\mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \rangle$. Dabei sind die ersten beiden Idealtangentenkegel simplizial und unimodular, während $IT_{\mathbf{a}_3}(\mathcal{J})$ nicht einmal spitz ist. Es gilt: $IT_{\mathbf{a}_3}(\mathcal{J}) \supseteq IT_{\mathbf{a}_1}(\mathcal{J})$ und $IT_{\mathbf{a}_3}(\mathcal{J}) \supseteq IT_{\mathbf{a}_2}(\mathcal{J})$. Die zugehörige Karte $\text{Spec}(K[x, y, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}])$ wird vollständig von der x^2 -Karte $\text{Spec}(K[x, \frac{y}{x}])$ bzw. der y^2 -Karte $\text{Spec}(K[\frac{x}{y}, y])$ überdeckt. Im Newtonpolyeder sieht man, dass der Punkt $(1, 1)$ auf der Kante von $(2, 0)$ nach $(0, 2)$ liegt.

Betrachtet man hingegen die Explosion im Ideal $\mathcal{J} = (x^2, y^2)$, so ist die Explosion in beiden Karten singulär. Die Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}_1}(\mathcal{J}) =_{\mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \rangle$ bzw. $IT_{\mathbf{a}_2}(\mathcal{J}) =_{\mathbb{N}} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 \rangle$ sind weder simplizial noch unimodular.

Beispiel 16. Sei diesmal $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ die Explosion von \mathbb{A}^3 in $\mathcal{S} = (x, y)(x, z) = (x^2, xy, xz, yz)$, wobei \mathcal{S} das Achsenkreuz $\{z\text{-Achse}\} \cup \{y\text{-Achse}\}$ definiert. Wir erhalten zu den vier Erzeugern $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1)$ bzw. $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 1)$ die Koordinatenringe $K[x, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}]$, $K[\frac{x}{y}, y, \frac{z}{x}]$, $K[\frac{x}{z}, \frac{y}{x}, z]$ bzw. $K[\frac{x}{z}, \frac{x}{y}, y, z]$. In der yz -Karte ist dabei der Koordinatenring isomorph zu $K[x, y, z, w]/(xz - yw)$, via $\frac{x}{z} \mapsto x, \frac{x}{y} \mapsto w, y \mapsto y, z \mapsto z$. In der yz -Karte ist die Explosion somit singularär im Nullpunkt des \mathbb{A}^4 . Die anderen drei Karten sind hingegen glatt.

Im Newtonpolyeder sieht man wieder, dass die Idealtangentenkegel in den Ecken $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ simplizial und unimodular sind, während $IT_{\mathbf{a}_4}(\mathcal{S})$ von den 4 Vektoren $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ erzeugt wird. Dies ist auch das minimale Erzeugendensystem, damit haben wir zum ersten Mal einen nichtsimplicialen Idealtangentenkegel erhalten!

In Beispiel 15 sieht man, dass die Idealtangentenkegel von $\mathbf{a} \in A$, die keine Ecken des Newtonpolyeders sind, vernachlässigbar sind. Auf der algebraischen Seite bedeutet das, dass die zu $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ gehörige Karte schon von anderen Karten überdeckt wird. Allerdings dürfen wir das Monom $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ bzw. den Vektor \mathbf{a} selbst nicht einfach als Idealerzeuger bzw. als Erzeuger in den Idealtangentenkegeln weglassen. Denn sonst fehlen, wie im zweiten Teil von Beispiel 15, in den Idealtangentenkegeln der Ecken Erzeuger. Dann ist der Kegel nicht simplizial oder unimodular.

Nach diesen illustrativen Beispielen können wir mit Hilfe des Newtonpolyeders ein Kriterium für die Glattheit der Explosion von \mathbb{A}^n in \mathcal{S} formulieren.

Kriterium der Glattheit

Satz 7. Sei $\mathcal{S} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ ein monomiales Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$ und $N = N(\mathcal{S})$ das assoziierte Newtonpolyeder. Betrachte die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ mit Zentrum \mathcal{S} . Dann gilt für $\mathbf{a} \in A$:

- (1) Falls \mathbf{a} keine Ecke von N ist, wird die entsprechende \mathbf{a} -Karte schon von den den benachbarten Ecken zugeordneten Karten von $\tilde{\mathbb{A}}^n$ überdeckt.
- (2) Falls \mathbf{a} eine Ecke von N ist, so ist die Explosion in dieser Karte genau dann glatt, wenn der Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ simplizial und unimodular ist.
- (3) Für eine Ecke \mathbf{a} von N impliziert dies, dass alle Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ primitiv sind und dass daher der Idealtangentenkegel im Punkt \mathbf{a} mit dem ganzzahligen Tangentenkegel $T_{\mathbf{a}}(N) \cap \mathbb{Z}^n$ übereinstimmen muss.

Beweis. Zuerst widmen wir uns (2): Sei \mathbf{a} eine Ecke von N . Die Explosion $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ ist in der \mathbf{a} -Karte genau dann glatt, wenn der zugehörige Koordinatenring $K[x_1, \dots, x_n, \mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}} : \mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\}]$ isomorph zu einem Polynomring $K[y_1, \dots, y_n]$ ist. Wir bezeichnen die $l = n + |A| - 1$ monomialen Erzeuger $x_1, \dots, x_n, \mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}$ des Koordinatenrings der \mathbf{a} -Karte mit z_1, \dots, z_l . Dann gibt es unter diesen z_i genau n Stück, die schon den ganzen Ring erzeugen (da die \mathbf{a} -Karte glatt ist). Wir wählen diese n Erzeuger aus und bezeichnen sie (wie bereits oben) mit y_1, \dots, y_n . Sei $z \in \{z_1, \dots, z_l\} \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$. Da die y_i den Polynomring erzeugen, erfüllt z eine monomiale Relation

$$z = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Geometrisch ist dies äquivalent zu: Sei $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Dabei bezeichne $\mathbf{v}_k \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a} : \mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\}\}$ den Exponenten des Monoms y_k bzgl. x_1, \dots, x_n . Der Idealtangentenkegel wird schon erzeugt von den zu den y_j gehörenden Exponenten. Die restlichen Exponenten $\mathbf{v} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' -$

$\mathbf{a} : \mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\} \setminus \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ erfüllen die zur monomialen Relation analoge *lineare* Relation

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = V \cdot \alpha,$$

wobei $V \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die Matrix mit Spalten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ist. Diese Gleichung liefert $\mathbf{v} \in IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ für alle Exponentenvektoren \mathbf{v} . Da alle n Standardbasisvektoren \mathbf{e}_j in $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ enthalten sind, ist er n -dimensional und die Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bilden außerdem eine Basis von \mathbb{Z}^n . Das ist äquivalent zu $\det(V) = \pm 1$. Der Idealtangentenkegel ist somit simplizial und unimodular.

Wir haben bis jetzt nur äquivalente Formulierungen für die Relationen zwischen dem Idealtangentenkegel von \mathbf{a} und der \mathbf{a} -Karte der Explosion benutzt. Daher haben wir auch schon die Rückrichtung bewiesen: wenn \mathbf{a} eine Ecke von N ist und $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ simplizial und unimodular ist, so ist die zugehörige Karte der Explosion glatt. Damit ist (2) bewiesen.

Aussage (3) folgt sofort: sei dazu wieder $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ simplizial und unimodular. Angenommen ein \mathbf{v}_i , o.B.d.A. \mathbf{v}_1 , wäre nicht primitiv. Dann existiert eine natürliche Zahl $k \geq 2$, sodass $\frac{1}{k} \mathbf{v}_1 \in \mathbb{Z}^n$ ist. Das Volumen der $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ beträgt

$$k \cdot \underbrace{\left| \det\left(\frac{1}{k} \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\right) \right|}_{\in \mathbb{Z}_{>0}},$$

ist also echt größer gleich k . Dies liefert aber einen Widerspruch zur Unimodularität des Idealtangentenkegels.

Nun zeigen wir Aussage (1) des Lemmas: Wir betrachten zuerst ein \mathbf{a} , das in einer Seite von N liegt. Geometrisch bedeutet "in einer Seite liegen", dass \mathbf{a} in der konvexen Hülle von $m \geq 2$ Vektoren $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a} \in A$ enthalten ist. Wir bezeichnen diese Vektoren mit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Man kann \mathbf{a} darstellen als

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{a}_j, \text{ wobei } \lambda_j \in \mathbb{Q}_{>0}, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1.$$

Wie vorher wird der Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ von den Vektoren $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a}$, für alle $\mathbf{a}' \in A \setminus \{\mathbf{a}\}$ erzeugt. Allerdings ist jetzt auch der Nullvektor eine nichttriviale \mathbb{Q} -Linearkombination von Erzeugern $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$, denn

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (\mathbf{a}_j - \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{a}_k}_{=1}) = \mathbf{a} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{a}_k = 0.$$

Durch Multiplikation mit einem geeignetem $\lambda \in \mathbb{N}$ kann erreichen, dass alle $\alpha_i := \lambda \cdot \lambda_i$ natürliche Zahlen sind. Man kann also 0 als nichttriviale \mathbb{N} -Linearkombination $0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j (\mathbf{a}_j - \mathbf{a})$ der Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ darstellen. Der Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ ist somit nicht spitz. Dies impliziert aber, dass auch $\mathbf{a} - \mathbf{a}_j$ für alle j im Idealtangentenkegel von N bei \mathbf{a} enthalten ist. Denn:

$$\mathbf{a} - \mathbf{a}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \alpha_k (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}) + (\alpha_j - 1)(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}).$$

Da α_j größer gleich 1 ist, ist somit $\mathbf{a} - \mathbf{a}_j$ eine \mathbb{N} -Linearkombination von Erzeugern des Idealtangentenkegels.

Wir zeigen noch, dass für $j = 1, \dots, m$ sogar $IT_{\mathbf{a}_j}(\mathcal{I}) \subseteq IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ ist: betrachte dazu den Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}_j}(\mathcal{I}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a}_j : \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}_j \rangle$. Es gilt aber für alle j

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a}_j = \underbrace{(\mathbf{a}' - \mathbf{a})}_{\in IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})} + \underbrace{(\mathbf{a} - \mathbf{a}_j)}_{\in IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})}.$$

Daher sind alle Erzeuger des Idealtangentenkegels von N bei \mathbf{a}_j in $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ enthalten, also ist der ganze Kegel $\subseteq IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$. Algebraisch übersetzt bedeutet dies, dass für alle $j = 1, \dots, m$ gilt: $\text{Spec}(k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\mathbf{a} - \mathbf{a}_j} : \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}_j]) \supseteq \text{Spec}(k[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\mathbf{a}' - \mathbf{a}} : \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}])$. Das heißt, dass die \mathbf{a} -Karte jeder \mathbf{a}_j -Karte enthalten ist.

Falls \mathbf{a} im Inneren von N liegt, so ist der zu \mathbf{a} gehörige Idealtangentenkegel gleich \mathbb{Z}^n . Dann ist ebenso 0 in der konvexen Hülle der Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ enthalten. In diesem Fall ist der Koordinatenring der \mathbf{a} -Karte isomorph zu $K[y_1, \dots, y_n, \frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_n}]$. Bekanntlich ist $\text{Spec}(K[y_1, \dots, y_n, \frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_n}]) = \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$. \square

Mit diesem Kriterium können wir mit Hilfe konvexer Geometrie bestimmen, wann die Explosion $\pi : \widehat{\mathbb{A}^n} \rightarrow \mathbb{A}^n$ in einem beliebigen monomialen Ideal \mathcal{I} glatt ist. Für die angestrebte äquivariante eingebettete Auflösung einer affinen torischen Hyperfläche X suchen wir ein monomiales Ideal, sodass die Explosion $\widehat{\mathbb{A}^n}$ des affinen n -dimensionalen Raumes glatt ist, und sodass alle Symmetrien von X erhalten bleiben. Der erste Kandidat ist das Rosenberideal \mathcal{R} .

Dann betrachten wir allgemein Explosionen mit Zentren Monomideale und werden einige Sätze zu Produkten von Koordinatenidealen zeigen.

Schließlich kommen wir zu bauchigen Mengen. Wir werden bauchige Mengen nach [DP] für Koordinatenideale definieren. Weiters werden wir mit unserem Kriterium zeigen, dass die Explosion von \mathbb{A}^n in einem Produkt von Idealen, die eine bauchige Menge bilden, glatt ist.

3.3 Explosion im Rosenberideal

Rosenberg [Ro] betrachtet ein spezielles monomiales Ideal \mathcal{R} in $K[x_1, \dots, x_n]$, dessen Verschwindungsmenge Z eine Vereinigung von Koordinatenachsen im \mathbb{A}^n ist. Das Ideal \mathcal{R} wird so konstruiert, dass die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{R} glatt ist und dass \mathcal{R} invariant unter jeder Permutation der Koordinaten auf \mathbb{A}^n ist, die auch Z invariant lässt.

Rosenberg verallgemeinert dieses Ergebnis auf ein Z in \mathbb{A}^n , das Verschwindungsmenge einer Vereinigung von Koordinatenunterräumen der Dimension $1 \leq r < n$ ist. Folgende Idee führt zur Konstruktion von \mathcal{R} : Betrachte das reduzierte Ideal \mathcal{I} von Z . Dann ist die Explosion von \mathbb{A}^n in \mathcal{I} singular. Im Newtonpolyeder $N(\mathcal{I})$ führen also von bestimmten Ecken zu viele Kanten weg, sodass die zugehörigen Idealtangentenkegel nicht simplizial sind. Man versucht daher, \mathcal{I} durch Multiplikation bzw. Durchschnittsbildung mit einem anderen Ideal so zu transformieren, dass die Explosion glatt wird und dass das Radikal \mathcal{I} unverändert bleibt. Wir werden nun sehen, was diese Prozedur in $N(\mathcal{I})$ bewirkt. Für eine garbentheoretische Interpretation dieser Vorgangsweise und weitere Details siehe [Ro].

Sei $1 < s \leq n$ und sei \mathcal{I} das reduzierte Ideal der ersten s Koordinatenachsen. Dann ist

$$\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^s (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n).$$

Dieses Ideal wird erzeugt von den Monomen $x_i x_j$ mit $1 \leq i < j \leq s$ und x_i mit $s < i$. Es bezeichne weiters $Z = V(\mathcal{I})$. Es sei $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ das reduzierte Ideal des Nullpunkts des \mathbb{A}^n . Man sieht sofort, dass die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ mit Zentrum \mathcal{I} singulär ist: In allen affinen Karten, die zu den Erzeugern x_i mit $s < i$ gehören, erfüllen die minimalen Erzeuger $\frac{x_j x_k}{x_i}, x_i, x_j, x_k$ mit $j < k \leq s$, Relationen der Form

$$\frac{x_j x_k}{x_i} \cdot x_i - x_j \cdot x_k.$$

Daher sind die zugehörigen Koordinatenringe nicht isomorph zu einem Polynomring in n Variablen. Die zugehörigen Kartenausdrücke sind gegeben als

$$\text{Spec} \left(K \left[x_1, \dots, x_n, \frac{x_j x_k}{x_i}, \frac{x_l}{x_i} : l > s \right] / \left(\frac{x_j x_k}{x_i} x_i - x_j x_k : j < k \leq s \right) \right).$$

Diese Varietäten sind singulär. Betrachte nun das Newtonpolyeder $N(\mathcal{I})$. Dann ist der Idealtangentenkegel zu einer Ecke \mathbf{e}_i mit $s < i$ nicht simplizial, denn: Die minimalen Erzeuger des Idealtangentenkegels von $N(\mathcal{I})$ in einer Ecke \mathbf{e}_i sind die Vektoren \mathbf{e}_j mit $j \leq s$ und $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$ für $j \neq i > s$ und zusätzlich $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ für $j < k \leq s$. Der Kegel ist spitz, daher ist \mathbf{e}_i eine Ecke von $N(\mathcal{I})$. Die Anzahl der minimalen Erzeuger beträgt aber $n + \binom{s}{2}$, daher ist $IT_{\mathbf{e}_i}(\mathcal{I})$ nicht simplizial. Für $s > 2$ sind auch alle Idealtangentenkegel zu $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ mit $i < j \leq s$ nicht simplizial, da sie die minimalen Erzeuger $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ mit $k > s$, $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j$ und $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j$ für $k \in \{1, \dots, s\} \setminus \{i, j\}$ besitzen (dies sind $n + s - 2$ Vektoren!).

Man versucht nun, eine Ecke \mathbf{v} von $N(\mathcal{I})$, von der mehr als n Kanten ausgehen, in mehrere neue Ecken "auseinanderzuziehen". Jede neue Ecke soll einige Kanten von \mathbf{v} erben, allerdings soll der jeweilige Idealtangentenkegel genau n minimale Erzeuger besitzen. Rosenberg schlägt zwei Möglichkeiten vor, die nichtsimplizialen Idealtangentenkegel zu glätten. Zum Einen kann man die störende Ecke einfach von $N(\mathcal{I})$ abschneiden (vgl. Abb. 5).

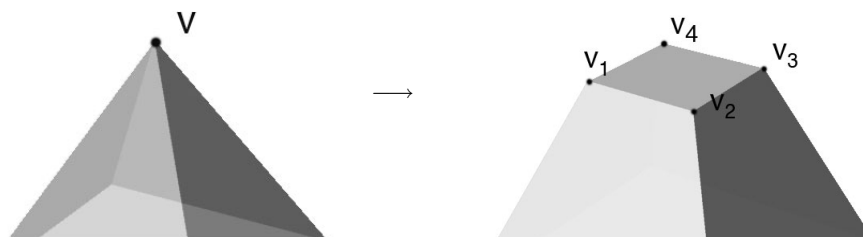


Abb. 5: Das Abschneiden einer Ecke mit zu vielen Kanten.

Dies entspricht auf Idealebene dem Schnitt von \mathcal{I} mit einem anderen Ideal. Alternativ dazu kann man die betreffende Ecke strecken, d.h., man ersetzt das Polyeder $N(\mathcal{I})$ durch die Minkowski Summe von $N(\mathcal{I})$ und einem anderen geeigneten Newtonpolyeder. Dies entspricht der Multiplikation von \mathcal{I} mit einem anderen Ideal (vgl. Abb. 6).

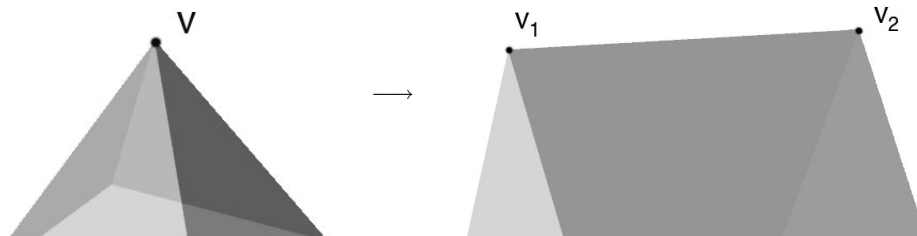


Abb. 6: Die Summe zweier Newtonpolyeder.

Durch diese Modifikationen sollte natürlich das Radikal von \mathcal{I} unverändert bleiben und damit die Verschwindungsmenge Z . Wir verwenden zum Glätten des Newtonpolyeders eine Potenz des maximalen Ideals \mathfrak{m} . Die Wahl des “Glättungsideals” ist allerdings keineswegs eindeutig! Wir könnten jedes Ideal \mathcal{J} wählen, sodass die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum $\mathcal{I} \cap \mathcal{J}$ bzw. $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ glatt ist und sodass $\sqrt{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}$ bzw. $\sqrt{\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}}$ gleich \mathcal{I} ist.

Wegen $\mathcal{I} \cap \mathfrak{m} = \mathcal{I}$ betrachten wir das Ideal $\mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^2$. Das zugehörige Newtonpolyeder besitzt immer noch viele Ecken mit nichtsimplicialen Idealtangentenkegeln (in Abb. 7 links ist das Newtonpolyeder von $\mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^2$ für $n = 3, s = 2$ zu sehen). Wir können diese Ecken jedoch durch einen Schnitt mit \mathfrak{m}^3 oder durch Multiplikation mit \mathfrak{m} glätten. Da $\mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^2$ von Monomen mit Grad 2 erzeugt wird, erhalten wir durch jede dieser beiden Operationen dasselbe Ideal.



Abb. 7: Die Newtonpolyeder von $\mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^2$ (links) und \mathcal{R} (rechts).

Definiere schließlich $\mathcal{R} := \mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^3$. Es gilt:

$$\sqrt{\mathcal{R}} = \sqrt{\mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^3} = \mathcal{I} \cap \mathfrak{m} = \mathcal{I}.$$

Das Radikal von \mathcal{R} ist wie verlangt das ursprüngliche \mathcal{I} und daher ist $V(\mathcal{R}) = V(\mathcal{I})$. Das Ideal \mathcal{R} ist invariant unter jedem Automorphismus des \mathbb{A}^n , der \mathcal{I} unverändert lässt. Außerdem ist \mathcal{R} ganz abgeschlossen.

Satz 8. Sei \mathcal{I} das reduzierte Ideal der ersten s Koordinatenachsen des \mathbb{A}^n wie oben. Dann ist die Explosion von \mathbb{A}^n in $\mathcal{R} = \mathcal{I} \cap \mathfrak{m}^3$ glatt.

Beweis. Wir zeigen die Glattheit von $\tilde{\mathbb{A}}^n$ mit unserem Newtonpolyederkriterium. Das Newtonpolyeder $N(\mathcal{R})$ besitzt die Eckenmenge

$$\{2\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq n, i \neq j\} \cup \{3\mathbf{e}_i : s < i \leq n\}.$$

Die restlichen Erzeuger von \mathcal{R} entsprechen inneren Punkten von $N(\mathcal{R})$ oder liegen auf Seiten des Newtonpolyeders, wie man leicht nachrechnen kann. Zum Beispiel sind alle $2\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i$ mit $s < j \leq n$ und $1 \leq i \leq s$ konvexe Linearkombinationen der Ecken:

$$2\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i = 1/2(2\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) + 1/2(3\mathbf{e}_i).$$

Betrachte nun den Idealtangentenkegel $IT_{2\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}(\mathcal{R})$ zu einer Ecke. Die zugehörigen Kantenvektoren sind \mathbf{e}_i für die unendlich fernen Ecken, $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ mit $k \notin \{i, j\}$ für die benachbarten Ecken (Beachte: Da \mathcal{R} ganz abgeschlossen ist, sind alle Gitterpunkte aus $N(\mathcal{R}) \cap \mathbb{Z}^n$ im Idealtangentenkegel zu jeder Ecke enthalten. Daher sind diese Erzeuger die primitiven Kantenvektoren!). Dies sind genau n Erzeuger. Sei A die Matrix, deren Spalten diese n minimalen Erzeuger des Idealtangentenkegels bilden. In jeder Spalte A_{-j} sind die Einträge Elemente der Menge $\{\pm 1, 0\}$, wobei jeweils eine 1 und höchstens eine -1 (von $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ bzw. \mathbf{e}_i) auftauchen. Anders ausgedrückt: die Matrix A ist *total unimodular*, d.h., $\det(A) = \pm 1$ oder 0 . (Siehe dazu Abschnitt über Koordinatenideale oder [Sc, ch. 19]). Da die n Vektoren linear unabhängig sind, ist somit $\det(A) = \pm 1$.

Für eine Ecke $3\mathbf{e}_i$ wird der Idealtangentenkegel erzeugt von \mathbf{e}_i (unendlich ferne Ecke) und den Vektoren $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$ für $k \neq i$ (benachbarte Ecken). Wie oben sieht man, dass die zugehörige $n \times n$ Matrix total unimodular ist und Determinante ± 1 besitzt. Damit haben wir die Simplizialität und Unimodularität der Idealtangentenkegel aller Ecken gezeigt. Die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{R} ist also glatt. \square

Somit haben wir ein nichtreduziertes Zentrum der Explosion des \mathbb{A}^n gefunden, das alle gewünschten Symmetrien erhält. Wenn wir aber die strikt transformierte X' einer singulären affinen torischen Hyperfläche $X = V(\mathbf{x}^{\mathbf{b}^+} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}^-})$ betrachten, wird, wie schon vorher erwähnt, unsere Invariante \mathcal{I} in einigen Fällen echt lexikographisch größer: Man sieht dies am Beispiel der Fläche $X = V(x^a - y^b z^b)$ in \mathbb{A}^3 , wobei $a \leq b$. In diesem Fall ist X bzgl. der Permutation von y und z invariant. Wir erhalten also

$$\mathcal{R} = (x, yz) \cap (x, y, z)^3 = (x^3, x^2y, x^2z, xy^2, xz^2, y^2z, yz^2).$$

Die Invariante von X ist $\mathcal{I} = (a, b, 1, 2)$. In der y^2z -Karte ist die strikt transformierte X' durch die Gleichung $x^a = y^{2b-a} z^{b-a}$ gegeben, die Invariante lautet $\mathcal{I}'_{y^2z} = (a, 2b - a, 1, 1)$. Für $b > a$ ist somit $\mathcal{I}'_{y^2z} >_{lex} \mathcal{I}$. Wir können für $b > 2a$ überhaupt keine Verbesserung messen: Die Ordnung von f' bleibt konstant gleich a , während der Grad von f' für $b > 2a$ sogar steigt.

3.4 Explosionen in Produkten von Idealen

Wir betrachten nun einige Anwendungen des Glattheitskriteriums auf Explosionen von \mathbb{A}^n mit Zentren Produkte von monomialen Idealen. Man kann für ein beliebig vorgegebenes monomiales Ideal $\mathcal{I} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ berechnen, ob die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{I} glatt ist. Dazu teste jedes $\mathbf{a} \in A$ den Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ in $N(\mathcal{I})$ auf Simplizialität und Unimodularität (z.B. mit MAPLE). Es ist jedoch schwierig, allgemeine Aussagen zu treffen. Daher betrachten wir im Folgenden speziell Produkte von monomialen Idealen. Auf Polyederebene bedeutet dies, die Minkowski-Summen ihrer Newtonpolyeder zu betrachten.

Wir nennen ein monomiales Ideal $\mathcal{J} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ in $K[x_1, \dots, x_n]$ *zahm*, wenn die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^n$ von \mathbb{A}^n mit Zentrum \mathcal{J} glatt ist. Entsprechend ist das zugehörige Newtonpolyeder $N(\mathcal{J})$ genau dann *zahm*, wenn \mathcal{J} zahm ist. Somit werden wir das Kriterium für die Glattheit der Explosion des \mathbb{A}^n (Satz 7) auch *Zahmheitskriterium* nennen. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass die Menge A *minimal* ist, d.h., A enthält keine inneren Punkte von $N(\mathcal{J})$. Dann nennen wir A die (eindeutig bestimmte) *Wolke* von \mathcal{J} .

Wir zeigen zuerst, dass die Explosion des \mathbb{A}^n in einem Produkt von zahmen Idealen glatt ist, wenn ihre Wolken disjunkt sind. Dann spezialisieren wir uns auf Produkte von Koordinatenidealen und zeigen die Zahmheit für einige Spezialfälle. Schließlich kommen wir zu bauchigen Mengen von Koordinatenidealen.

Satz 9. *Seien \mathcal{J}_i für $i = 1, \dots, k$ monomiale Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$ mit paarweise disjunkten Wolken. Sei $\mathcal{J} := \prod_{i=1}^k \mathcal{J}_i$. Ist jedes \mathcal{J}_i zahm, dann ist auch \mathcal{J} zahm.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Aussagen über Newtonpolyeder. Zuerst brauchen wir noch ein kleines Lemmalein.

Lemma 2. *Sei $\mathcal{J} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A) \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ein monomiales Ideal mit $A \subseteq \mathbb{N}^s \times 0^{n-s}$ und $s \leq n$. Dann gilt: \mathcal{J} in $K[x_1, \dots, x_n]$ ist genau dann zahm, wenn $\tilde{\mathcal{J}} := \mathcal{J} \cap K[x_1, \dots, x_s]$ zahm ist.*

Beweis. Es sei $\tilde{\mathcal{J}} \subseteq K[x_1, \dots, x_s]$ zahm. Wir betrachten die beiden Newtonpolyeder $P = N(\mathcal{J}) \subseteq \mathbb{R}^n$ bzw. $\tilde{P} = N(\tilde{\mathcal{J}}) \subseteq \mathbb{R}^s$. P ist die direkte Summe von \tilde{P} und \mathbb{R}^{n-s} , d.h., wir können P darstellen als kartesisches Produkt $P = \tilde{P} \times \mathbb{R}^{n-s} \subseteq \mathbb{R}^n$. Bezeichne \mathbf{a} eine Ecke von \tilde{P} . Dann ist der Punkt

$$(\mathbf{a}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s})$$

eine Ecke von $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Der Idealtangentenkegel von \tilde{P} in \mathbf{a} ist $\mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s, \mathbf{a}' - \mathbf{a} : \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a} \rangle$ und dieser ist nach Voraussetzung simplizial und unimodular. Daher existieren s linear unabhängige minimale Erzeuger $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ in \mathbb{Z}^s von $IT_{\mathbf{a}}(\tilde{\mathcal{J}})$ mit $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = \pm 1$. Der entsprechende Idealtangentenkegel $IT_{(\mathbf{a}, 0, \dots, 0)}(\mathcal{J})$ von P besitzt die n minimalen Erzeuger $(\mathbf{v}_1, 0, \dots, 0), \dots, (\mathbf{v}_s, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_{s+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Durch Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatz auf die Matrix, deren Spalten diese minimalen Erzeuger bilden, folgt die Unimodularität von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$. Der Beweis der Rückrichtung ist klar. \square

Lemma 3. *Seien $P \subseteq \mathbb{R}^s$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^t$ Polyeder. Sei \mathbf{e} eine Ecke von P und \mathbf{f} eine Ecke von Q . Dann ist (\mathbf{e}, \mathbf{f}) eine Ecke von $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^{s+t}$.*

Beweis. Da \mathbf{e} eine Ecke von P ist, gibt es einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^s$ und eine reelle Zahl α mit $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \alpha$ und $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p} < \alpha$ für alle $\mathbf{p} \in P \setminus \mathbf{e}$. Dabei bezeichne \cdot das euklidische Skalarprodukt. Ebenso existieren ein $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^t$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{b} \cdot \mathbf{f} = \beta$ und $\mathbf{b} \cdot \mathbf{q} < \beta$ für alle $\mathbf{q} \in Q \setminus \mathbf{f}$ gilt. Wir zeigen nun: $(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}^{s+t}$ ist eine Ecke von $P \times Q$. Definiere dazu $\mathbf{c} := (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{s+t}$. Dann gilt

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} = \alpha + \beta,$$

und weiters für alle $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in P \times Q \setminus \{(\mathbf{e}, \mathbf{f})\}$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{q} < \alpha + \beta.$$

Somit haben wir die Behauptung gezeigt. \square

Lemma 4. Seien $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$, $\mathcal{I}_2 = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in B)$ zwei Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$ mit endlichen Wolken $A, B \subseteq \mathbb{N}^n$ und assoziierten Newtonpolyedern P bzw. Q . Dann gilt:

(1) $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2) = P + Q$.

(2) Wenn $A \cap B = \emptyset$ und \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 zahm sind, so ist auch $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$ zahm.

(3) Seien $A \subseteq \mathbb{N}^s \times 0^{n-s}$, $B \subseteq 0^s \times \mathbb{N}^{n-s}$ und $\tilde{P} = P \cap \mathbb{R}^s$, $\tilde{Q} = Q \cap \mathbb{R}^{n-s}$. Dann ist $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2) = \tilde{P} \times \tilde{Q}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst Aussage (1). Nach Definition der Newtonpolyeder P und Q gilt

$$P + Q = \text{conv}(A + \mathbb{R}_+^n) + \text{conv}(B + \mathbb{R}_+^n) = \text{conv}(A + B + \mathbb{R}_+^n).$$

Wegen $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B)$ ist $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2) = \text{conv}(A + B + \mathbb{R}_+^n)$. Daraus folgt (1).

Für Aussage (3) können wir nach Lemma 2 annehmen, dass $A \cup B = \{1, \dots, n\}$ gilt. Dann gilt

$$P + Q = \tilde{P} \oplus \tilde{Q} = \tilde{P} \times \tilde{Q}.$$

Zusammen mit (1) liefert dies die Aussage $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2) = \tilde{P} \times \tilde{Q}$.

Schließlich zeigen wir (2): Seien dazu o.B.d.A. $A \subseteq \mathbb{N}^s \times 0^{n-s}$, $B \subseteq 0^s \times \mathbb{N}^{n-s}$ und \tilde{P} , \tilde{Q} wie oben definiert. Wenn $\tilde{\mathbf{a}}$ eine Ecke von \tilde{P} bzw. $\tilde{\mathbf{b}}$ eine Ecke von \tilde{Q} ist, folgt aus Lemma 3, dass $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ eine Ecke von $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ ist. Umgekehrt ist jede Ecke von $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ eine Summe von zwei Ecken $\mathbf{a} = (\tilde{\mathbf{a}}, 0, \dots, 0) \in P$ und $\mathbf{b} = (0, \dots, 0, \tilde{\mathbf{b}}) \in Q$. Die Eckenmenge von $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ ist somit $\{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \text{ Ecke von } P, \mathbf{b} \text{ Ecke von } Q\}$. Nun müssen wir noch zeigen, dass der zu jeder Ecke $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ assoziierte Idealtangentenkegel von $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ simplizial und unimodular ist. Es gilt: $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ wird erzeugt von $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, der Menge der Vektoren $\{\mathbf{a}' + \mathbf{b}' - (\mathbf{a} + \mathbf{b})\}$, bzw. $\{\mathbf{a}' - \mathbf{a}\}$ und $\{\mathbf{b}' - \mathbf{b}\}$ für alle $\mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}' \in B \setminus \mathbf{b}$. Wir können sofort einige Erzeuger eliminieren: Alle Elemente der ersten Menge sind \mathbb{N} -Linearkombinationen von Vektoren der Gestalt $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}' - \mathbf{b}$. Daher bleiben uns nur mehr die Elemente der letzten zwei Mengen und die Standardbasisvektoren als Kandidaten für minimale Erzeuger übrig. Dies sind aber dieselben Vektoren, die auch $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I}_1)$ bzw. $IT_{\mathbf{b}}(\mathcal{I}_2)$ erzeugen! Nach Voraussetzung und Lemma 2 wird der Idealtangentenkegel der Ecke \mathbf{a} von P erzeugt von s linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ und $\mathbf{e}_{s+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Der Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{b}}(\mathcal{I}_2)$ besitzt das minimale Erzeugendensystem $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s, \mathbf{w}_{s+1}, \dots, \mathbf{w}_n$, mit \mathbf{w}_j linear unabhängig über \mathbb{R} . Es bezeichne $\tilde{\mathbf{v}}_i := (v_{1i}, \dots, v_{si})$ bzw. $\tilde{\mathbf{w}}_j := (w_{s+1,j}, \dots, w_{n,j})$. Die minimalen Erzeuger sind von der Form $\mathbf{v}_i = (\tilde{\mathbf{v}}_i, 0, \dots, 0)$ bzw. $\mathbf{w}_j = (0, \dots, 0, \tilde{\mathbf{w}}_j)$. Wir erhalten für den Idealtangentenkegel:

$$IT_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2) = \mathbb{N}\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_{s+1}, \dots, \mathbf{w}_n \rangle.$$

Da die Vektoren \mathbf{v}_i und \mathbf{w}_j linear unabhängig über \mathbb{R} sind (disjunkte Wolken!), ist hiermit die Simplizialität des Idealtangentenkegels gezeigt. Die beiden Matrizen $V := (\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_s) \in \mathbb{Z}^{s \times s}$, bzw. $W := (\tilde{\mathbf{w}}_{s+1}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_n) \in \mathbb{Z}^{(n-s) \times (n-s)}$ sind unimodular. Wir betrachten nun die Matrix A der minimalen Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$. Nach den obigen Ausführungen ist sie von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{pmatrix},$$

also gilt $\det(A) = \det(V) \det(W) = \pm 1$. Damit ist bewiesen, dass der Idealtangentenkegel jeder Ecke des Newtonpolyeders von $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$ unimodular ist. Daher ist dieses Ideal zahm.

□

Bemerkung. Das Bilden der Summe der beiden Newtonpolyeder $P = N(\mathcal{I}_1)$ und $Q = N(\mathcal{I}_2)$ kann man folgendermaßen visualisieren: Wir lassen P fest, wählen einen Punkt $p \in Q$ und bewegen Q durch Translationen so, dass p alle Punkte von P erreicht. Dann wird $P + Q$ von Mengen der Form $\{\mathbf{q} + Q : \mathbf{q} \in P\}$ überdeckt. Es gilt also $P + Q = \bigcup_{\mathbf{q} \in P} \{\mathbf{q} + Q\}$. Man kann außerdem zeigen, dass sogar

$$P + Q = P \cup \bigcup_{\mathbf{q} \in \partial P} \{\mathbf{q} + Q\}$$

gilt.

Wir können nun endlich zum Beweis von Satz 9 übergehen.

Beweis (von Satz 9). Sei also $\mathcal{I} := \prod_{i=1}^k \mathcal{I}_i$, wobei $\mathcal{I}_i = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A_i)$ Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$ sind. Wir wenden Induktion über k an: Für $k = 1$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt von k auf $k + 1$ seien nun o.B.d.A. die ersten k Wolken in \mathbb{N}^s für ein $s \leq n$ enthalten. Dann ist $A_{k+1} \subseteq 0^s \times \mathbb{N}^{n-s}$. Die Wolke von \mathcal{I} ist

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup A_{k+1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist das Produktideal $\prod_{i=1}^k \mathcal{I}_i$ zahm und \mathcal{I}_{k+1} ist nach Voraussetzung des Satzes zahm. Wegen $(\bigcup_{i=1}^k A_i) \cap A_{k+1} = \emptyset$ können wir nun Lemma 4 auf die beiden Ideale $\mathcal{I}_1 = \prod_{i=1}^k \mathcal{I}_i$ bzw. $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_{k+1}$ anwenden. Dies liefert die Zahmheit von $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2) = N(\prod_{i=1}^{k+1} \mathcal{I}_i)$. Damit haben wir den Induktionsschritt gezeigt. □

Beispiel 17. Seien $\mathcal{I}_1 = (x, y)$ und $\mathcal{I}_2 = (z^2, zw, w^3)$ Ideale in $K[x, y, z, w]$. \mathcal{I}_1 ist das reduzierte Ideal der zw -Ebene im \mathbb{A}^4 und das nichtreduzierte Ideal \mathcal{I}_2 definiert die xy -Ebene im \mathbb{A}^4 . Man rechnet leicht nach, dass beide Ideale zahm sind. Die zugehörigen Newtonpolyeder sind $N(\mathcal{I}_1) = \text{conv}(\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} + \mathbb{R}_+^4)$ bzw. $N(\mathcal{I}_2) = \text{conv}(\{2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, 3\mathbf{e}_4\} + \mathbb{R}_+^4)$. Nach Satz 9 ist auch die Explosion von \mathbb{A}^4 mit Zentrum

$$\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 = (xz^2, yz^2, xzw, yzw, xw^3, yw^3)$$

glatt. $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2$ ist eine nichtreduzierte Struktur auf der Vereinigung der xy -Ebene mit der zw -Ebene.

Beispiel 18. Für nicht disjunkte Wolken stimmt der obige Satz nicht. Seien $\mathcal{I}_1 = (x, y)$ und $\mathcal{I}_2 = (x, z)$ die reduzierten Ideale der z - und der y -Achse im affinen dreidimensionalen Raum. Beide Ideale sind zahm, jedoch ist die Explosion $\tilde{\mathbb{A}}^3$ im Produkt $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 = (x^2, xy, xz, yz)$, dem Achsenkreuz, nicht mehr glatt. Betrachte dazu die yz -Karte: Der Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ zur zugehörigen Ecke im Newtonpolyeder $N(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ besitzt das minimale Erzeugendensystem $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Somit ist $IT_{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}(\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2)$ nicht simplizial. In der yz -Karte ist $\tilde{\mathbb{A}}^3$ isomorph zu $\text{Spec}(K[x, y, z, w]/(xz - yw))$.

Mehr von Koordinatenidealen

Sei $\mathcal{I} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ein *Koordinatenideal* $\mathcal{I} = (x_i : i \in I)$ mit $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Wie wir schon in Kapitel 2 gesehen haben, ist \mathcal{I} zahm.

Dies sieht man auch am Newtonpolyeder: In $N(\mathcal{I}) = \text{conv}(\{\mathbf{e}_i : i \in I\} + \mathbb{R}_+^n)$ gilt für die Idealtangentenkegel der Ecken $IT_{\mathbf{e}_i}(\mathcal{I}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i : j \in I \setminus i \rangle$. Es existieren also n minimale Erzeuger des Idealtangentenkegels von $N(\mathcal{I})$ in \mathbf{e}_i , nämlich \mathbf{e}_j , falls $j \notin I \setminus i$, bzw. $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$, falls $j \in I \setminus i$. Daraus folgt, dass $IT_{\mathbf{e}_i}(\mathcal{I})$ simplizial ist. Für die Unimodularität betrachten wir die $n \times n$ Matrix A , deren Spalten die n obigen Erzeuger von $IT_{\mathbf{e}_i}(\mathcal{I})$ bilden.

Es ist $\det(A) = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$. Somit ist auch die zweite Bedingung des Zahmheitskriteriums erfüllt und die Explosion ist in jeder Karte glatt.

Wir wollen nun *Produkte* von Koordinatenidealen studieren. Wir betrachten die zugehörigen Newtonpolyeder, speziell die Idealtangentenkegel in den Ecken. Diese Idealtangentenkegel sind von spezieller Bauart: Alle Erzeuger sind entweder Standardbasisvektoren (Verbindung zu den unendlich fernen Ecken) oder von der Form $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$ (Verbindung einer Ecke \mathbf{e}_k zu einer endlichen Ecke \mathbf{e}_i). Weiters liegen alle Ecken auf einer affinen Hyperebene. Denn: Sei $\mathcal{I} = \prod_{i=1}^s \mathcal{I}_i$ ein Produkt von Koordinatenidealen $\mathcal{I}_i = (x_j : j \in I_i)$ mit $I_i \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dann ist jedes Monom von \mathcal{I} ein Produkt von s Monomen x_j . Alle Erzeuger von \mathcal{I} sind von der Form

$$x_{j_1} \cdots x_{j_s}, \text{ wobei } j_i \in I_i.$$

Daher ist jede Ecke des Newtonpolyeders eine Summe von s Standardbasisvektoren. Wir können jede Ecke \mathbf{v} schreiben als $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^s \mathbf{e}_{j_i} = \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k$ mit $\sum_k \alpha_k = s$. Dabei ist $\alpha_k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k > 0$, falls mindestens ein $j_i = k$ ist. Das wiederum impliziert, dass alle Ecken auf der affinen Hyperfläche $H_s := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} \cdot \mathbf{1} = s\}$ liegen. ($\mathbf{1}$ bezeichnet den Vektor $(1, \dots, 1)$.)

Weiters gilt für die Idealtangentenkegel zu den Ecken von $N(\mathcal{I})$: Diese Kegel mögen zwar nicht notwendig simplizial sein, jedoch brauchen wir uns nie Sorgen bzgl. Unimodularität machen. Es gilt nämlich folgendes

Lemma 5. *Sei $\mathcal{I} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ ein ganz abgeschlossenes monomiales Ideal, und $N = N(\mathcal{I})$. Wenn der Idealtangentenkegel in einer Ecke von N simplizial ist, so ist er automatisch unimodular.*

Beweis. Nach Definition des Idealtangentenkegels sind alle Standardbasisvektoren im Kegel enthalten. Wenn wir also n linear unabhängige Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ finden können, so muss jeder Standardbasisvektor eine positive ganzzahlige Linearkombination dieser n Erzeuger sein. Das wiederum impliziert zusammen mit der Ganz-Absgeschlossenheit von \mathcal{I} , dass die n Erzeuger eine \mathbb{Z} -Basis von \mathbb{R}^n bilden. Dies ist die gewünschte Unimodularitätsbedingung. \square

Lemma 6. *Seien $\mathcal{I}_1 = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in B)$ zwei monomiale Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$ mit Newtonpolyedern $P = N(\mathcal{I}_1)$ und $Q = N(\mathcal{I}_2)$. Dann werden die Idealtangentenkegel der Punkte $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ in $P + Q$ erzeugt von den Erzeugern von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I}_1)$ und $IT_{\mathbf{b}}(\mathcal{I}_2)$.*

Beweis. Nach Definition sind

$$\begin{aligned} IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I}_1) &= \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a}, \text{ für } \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a} \rangle \\ IT_{\mathbf{b}}(\mathcal{I}_2) &= \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{b}' - \mathbf{b}, \text{ für } \mathbf{b}' \in B \setminus \mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

die Idealtangentenkegel von \mathbf{a} bzw. \mathbf{b} im jeweiligen Newtonpolyeder. In $P + Q$ gilt also

$$\begin{aligned} IT_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}(\mathcal{J}) &= \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' + \mathbf{b} - (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{a} + \mathbf{b}' - (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \mathbf{a}' + \mathbf{b}' - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \rangle \\ &= \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{a}' - \mathbf{a}, \mathbf{b}' - \mathbf{b}, \text{ für } \mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}, \mathbf{b}' \in B \setminus \mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}' \in A \setminus \mathbf{a}$ und $\mathbf{b}' \in B \setminus \mathbf{b}$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Wie schon früher bemerkt, müssen nicht alle $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ wirklich Ecken im Summenpolyeder sein. Außerdem sind i.A. nicht alle $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ benachbart zu einer Ecke $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Daher sind auch nicht alle Erzeuger des Idealtangentenkegels von $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ in $P + Q$ notwendig. Obige Vektoren bilden daher i.A. kein minimales Erzeugendensystem des Idealtangentenkegels.

Wir gehen nun der Frage nach, wann ein Produkt von Koordinatenidealen zahm ist. Wir betrachten zuerst den Fall von disjunkten Wolken, wie in Satz 9:

Sei $\bigcup N_i$ eine Partition von $\{1, \dots, n\}$. Bezeichne $\mathcal{J}_i := (x_j : j \in N_i)$ ein Koordinatenideal in $K[x_1, \dots, x_n]$. Sei $\mathcal{J} := \prod_i \mathcal{J}_i$. Dann ist \mathcal{J} nach Satz 9 zahm.

Im nächsten Lemma zeigen wir, dass die Idealtangentenkegel im Newtonpolyeder eines Produktes von Koordinatenidealen spezielle Erzeuger besitzen. Betrachte dazu die Matrix, deren Spalten die minimalen Erzeuger bilden. Wir führen folgenden Begriff ein:

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist *total unimodular*, wenn jede Unterdeterminante von A den Wert 0, 1 oder -1 hat. Insbesondere ist jeder Eintrag einer total unimodularen Matrix A entweder 0, 1 oder -1 .

Bemerkung. Total unimodulare Matrizen treten meist in Zusammenhang mit ganzzahliger Optimierung auf. Näheres zu diesem Thema und weitere Charakterisierungen von total unimodularen Matrizen finden sich in [Sc].

Lemma 7. Sei \mathcal{J} ein Produkt von s Koordinatenidealen $\mathcal{J}_i = (x_j : j \in I_i)$ in $K[x_1, \dots, x_n]$. Alle Erzeuger des Idealtangentenkegels des Newtonpolyeders $N(\mathcal{J})$ in einem Punkt $\mathbf{a} = \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k$, mit $\sum_k \alpha_k = s$ und \mathbf{a} aus der Wolke von \mathcal{J} , sind von der Form \mathbf{e}_β bzw. $\mathbf{e}_\beta - \mathbf{e}_k$ für ein k mit $\alpha_k \neq 0$ und $\beta \in \{1, \dots, n\}$. Wenn $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ simplizial ist, so ist er automatisch unimodular. Insbesondere ist mindestens ein Standardbasisvektor \mathbf{e}_j ein minimaler Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$.

Beweis. Die Form der minimalen Erzeuger folgt aus Lemma 6. Sei nun der Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ einer Ecke \mathbf{a} von $N(\mathcal{J})$ simplizial. Sei A die Matrix, deren Spalten die n eindeutigen minimalen Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ sind. Jede Spalte von A enthält entweder eine 1 und $n - 1$ Nullen (ein Erzeuger \mathbf{e}_i) oder genau eine 1, genau eine -1 und $n - 2$ Nullen (ein Erzeuger $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_k$). Nach [Sc, ch.19, p.274] ist A somit total unimodular. Da die n Erzeuger linear unabhängig sind, ist $\det(A) \in \{\pm 1\}$.

Falls kein \mathbf{e}_j ein minimaler Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{J})$ wäre, so hätte jede Spalte von A die Form $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ für einige $i \neq j$. Wieder nach [Sc, ch.19, p.274] wäre dann $\det(A) = 0$. Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Spalten von A ! \square

Wir werden zunächst an einem Beispiel einen weiteren Spezialfall von Explosionen in Produktidealen kennenlernen: Wir betrachten die Explosion von \mathbb{A}^n in einem Produkt von ineinanderenthaltenden Monomidealen.

Beispiel 19. Wir betrachten die Explosion von $K[x, y, z]$ im Ideal $\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 = (x, y)(x, y, z) = (x^2, xy, y^2, xz, yz)$. Es ist $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$. Nach Lemma 4 entsteht das Newtonpolyeder $P = N(\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2)$ als Minkowski-Summe von $P_1 = N(\mathcal{S}_1)$ und $P_2 = N(\mathcal{S}_2)$. In unserem Fall bilden die Ecken von P_2 das Standardsimplex, während die zwei Ecken von P_1 die Verbindungsstrecke von $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ begrenzen. Durch Verschieben des Standardsimplices entlang dieser Strecke erhalten wir das neue Newtonpolyeder P .

Rechnerisch: Betrachte die Punkte $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ mit $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, 2, 3\}$. Da die Wolken nicht disjunkt sind, sind nicht alle $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ notwendig Ecken. In unserem Beispiel ist $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_1) + \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_2)$. Dieser Punkt liegt also auf der Kante zwischen $2\mathbf{e}_1$ und $2\mathbf{e}_2$. (Wir können hier nicht Lemma 3 anwenden, da die Summe von P_1 und P_2 nicht *direkt* ist!).

Durch Berechnen der Idealtangentenkegel in den 4 Ecken von P sehen wir, dass diese simplizial und unimodular sind. Daher ist das Produktideal $\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2$ zahm.

Lemma 8. *Wir betrachten zwei Koordinatenideale $\mathcal{I} := (x_i : i \in I)$ und $\mathcal{J} := (x_j : j \in J)$ in $K[x_1, \dots, x_n]$ mit $I \subseteq J$. Dann ist $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ zahm.*

Beweis. Wir zeigen die Glattheit der Explosion wieder mit unserem Zahmheitskriterium: Die beiden Newtonpolyeder $P = N(\mathcal{I})$ und $Q = N(\mathcal{J})$ sind jeweils zahm. Da die Wolke I von \mathcal{I} in der Wolke J von \mathcal{J} enthalten ist, können wir hier nicht Satz 9 anwenden.

Wir werden die Simplizialität und die Unimodularität der Idealtangentenkegel in den Ecken von $R = P + Q$ durch direktes Berechnen der minimalen Erzeuger zeigen. Seien o.B.d.A. $J = \{1, \dots, n\}$ und $I = \{1, \dots, k\}$ mit $1 \leq k \leq n$. (Falls speziell $k = 1$ gilt, wird \mathcal{I} nur von x_1 erzeugt. Dann ist aber $N((x_1) \cdot \mathcal{J})$ das Newtonpolyeder Q verschoben um den Vektor \mathbf{e}_1 . Durch diese Translation haben sich die Idealtangentenkegel in den Ecken von Q nicht verändert. Sie besitzen insbesondere dieselben Erzeuger.)

Nach Lemma 4 sind alle Ecken von R von der Form $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$, wobei $i \in I$ und $j \in J$. Wir betrachten zuerst die Vektoren $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ mit $i, j \in I \cap J = I$. Hier erhalten wir Ecken der Gestalt $2\mathbf{e}_i$ für alle $i \in I$. Die Punkte $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ für $i \neq j \in I$ sind keine Ecken von R , da sie in der konvexen Hülle der $2\mathbf{e}_i$ enthalten sind. Nach dem Zahmheitskriterium reicht es also aus, die Idealtangentenkegel der $2\mathbf{e}_i$ zu betrachten. Weiters erhalten wir Ecken der Form $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ mit $i \in I$ und $j \in J \setminus I$.

Der Idealtangentenkegel von R in einer Ecke $2\mathbf{e}_i$, wobei $i \in I$, wird nach Lemma 6 von den n Standardbasisvektoren \mathbf{e}_k , den Vektoren $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$, für alle $k \in I \setminus i$ und allen $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$ für $j \in \{1, \dots, n\} \setminus i$ erzeugt. Folglich ist ein minimales Erzeugendensystem des Idealtangentenkegels in $2\mathbf{e}_i$ gegeben durch

$$IT_{2\mathbf{e}_i}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i : j \in \{1, \dots, n\} \setminus i \rangle.$$

Der Idealtangentenkegel ist somit simplizial. Die Unimodularität folgt aus Lemma 7. Für Ecken der Gestalt $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$, wobei $i \in I, j \in \{1, \dots, n\} \setminus I$, folgt aus Lemma 6

$$IT_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i : k \in I \setminus i, \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j : k \in J \setminus (j \cup I), \mathbf{e}_j \rangle.$$

Dabei sind dies wie gewünscht genau $(|I| - 1) + 1 + (|J| - |I| - 1) + 1 = |J| = n$ Erzeuger. Der Kegel ist wieder simplizial und unimodular, damit ist alles gezeigt. \square

Bemerkung. Im Beweis sieht man, wie sich die Ecken von P und Q durch die Summenbildung verändern: Jeder Exponentenvektor \mathbf{a} eines Monoms $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ wird in einer Koordinatenrichtung um eine Einheit verschoben. Er befindet sich nun auf der affinen

Hyperebene $\sum_{i=1}^n a_i = 2$. Dabei entsprechen die Ecken $2\mathbf{e}_i$ im neuen Newtonpolyeder R mit ihren Idealtangentenkegeln genau den Ecken \mathbf{e}_i in P bzw. Q . Die Idealtangentenkegel von Ecken $2\mathbf{e}_i$, mit $i \in I$, haben sich nicht verändert. Ecken \mathbf{e}_j , die nur in Q vorkommen, werden durch die Summenbildung zu $\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i$. In diesen neuen Ecken bleiben die Erzeuger der zugehörigen Idealtangentenkegel für die \mathbf{e}_k mit $k \in J \setminus I$ dieselben wie in Q . Die Erzeuger \mathbf{e}_k mit $k \in I \setminus i$ werden ersetzt durch $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$. Für den Erzeuger \mathbf{e}_i ergibt sich auch der entsprechende Q Vektor $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$. (Das größere Ideal dominiert also!) Wir erhalten insgesamt $|I| + (|J| - |I|) \cdot |I|$ Ecken in R .

Korollar. Sei $\mathcal{I} = (\mathbf{x}^{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A)$ ein monomiales Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$. Sei \mathcal{I} zahm. Dann ist auch $\mathcal{I}^2 := \mathcal{I} \cdot \mathcal{I}$ zahm. Im Newtonpolyeder bleiben alle Idealtangentenkegel gleich.

Beweis. Das Korollar folgt für ein homogenes Ideal \mathcal{I} auch aus der Isomorphie der Rees-Algebren von \mathcal{I} und \mathcal{I}^2 (vgl. [Hs, Ex. 5.10. (b), II] bzw. [EH, Ex. III-15]). \square

Wir erhalten aus dem obigen Satz weiter: Für $\mathcal{I} = (x_i : i \in I)$ sind die Ecken von $P = N(\mathcal{I}^2)$ gegeben durch $2\mathbf{e}_i$, wobei $i \in I$. Dies impliziert: Falls in einem Produkt von Koordinatenidealen ein Faktor mit einer Potenz größer gleich 2 vorkommt, verändern sich die Idealtangentenkegel der Ecken nicht. Genauer: Sei $\mathcal{I} := \mathcal{I}_1^{\alpha_1} \cdots \mathcal{I}_k^{\alpha_k}$ mit $\alpha_i \geq 1$ für alle i . Sei $\mathcal{I}_{red} := \mathcal{I}_1 \cdots \mathcal{I}_k$ das zugehörige reduzierte Ideal. Dann sind die Ecken von $N(\mathcal{I})$ von der Form $\sum \alpha_i \mathbf{e}_{j_i}$, mit $j_i \in I_i$ und die Idealtangentenkegel $IT_{\sum \alpha_i \mathbf{e}_{j_i}}(\mathcal{I})$ sind identisch mit $IT_{\sum \mathbf{e}_{j_i}}(\mathcal{I}_{red})$.

Wir betrachten nun einen allgemeineren Fall von ineinander enthaltenen Idealen:

Satz 10. Sei $\mathcal{I} = \prod_{i=1}^s \mathcal{I}_i$ ein Produkt von Koordinatenidealen $\mathcal{I}_i = (x_j : j \in I_i)$. Sei \mathcal{I} ein Koordinatenideal, das \mathcal{I} enthält. Dann gilt: Ist \mathcal{I} zahm, so auch $\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}$.

Beweis. Wir betrachten die Newtonpolyeder $P = N(\mathcal{I})$ und $Q = N(\mathcal{I})$. Es ist zu zeigen, dass $P+Q$ zahm ist. Die Ecken von $P+Q$ sind bekannterweise von der Gestalt $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, wobei \mathbf{a} eine Ecke von P und \mathbf{b} eine Ecke von Q bezeichne. Schreibe für die Menge $\{\mathbf{e}_m - \mathbf{e}_k : m \in M\}$ kurz $\mathbf{e}_M - \mathbf{e}_k$.

Nach Lemma 2 dürfen wir annehmen, das $\mathcal{I} = (x_1, \dots, x_n)$ ist, d.h., $J = \{1, \dots, n\}$. Für alle $j \in J$ gilt:

$$IT_{\mathbf{e}_j}(\mathcal{I}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Betrachte nun P . Da $\mathcal{I} = (\prod_{i=1}^s x_{j_i} : j_i \in I_i)$ ist, sind alle Ecken von P von der Form $\sum \alpha_k \mathbf{e}_k$, wobei $\alpha_k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^s \alpha_k = s$ und alle $k \in I := \bigcup_{i=1}^s I_i$ sein müssen. Weiters muss für alle $k \neq k'$ in I_i bzw. $I_{i'}$ gelten: $k, k' \notin I_i \cap I_{i'}$.

Nun zu den Idealtangentenkegeln der Ecken von P : Nach Lemma 6 folgt

$$IT_{\sum \alpha_k \mathbf{e}_k}(\mathcal{I}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{I_1 \setminus k_1} - \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{I_s \setminus k_s} - \mathbf{e}_{k_s}, \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_s}, \mathbf{e}_{J \setminus I} \rangle.$$

Nach Voraussetzung ist \mathcal{I} zahm. Wir können also unter den $|I_1| - 1 + \dots + |I_s| - 1 + s + (n - |I|) = \sum_{i=1}^s |I_i| + n - |I|$ Erzeugervektoren genau n Stück finden, die linear unabhängig sind und die den ganzen Idealtangentenkegel erzeugen. Betrachten wir nun den Idealtangentenkegel zu einer Ecke $\mathbf{a} = \sum \alpha_k \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j$ in $P + Q$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall. Es gebe ein i , sodass $j \in I_i \cap J = I_i$ ist. Nach Lemma 6 gilt

$$IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{I_1 \setminus k_1} - \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{I_s \setminus k_s} - \mathbf{e}_{k_s}, \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_s}, \mathbf{e}_{J \setminus I}, \mathbf{e}_{I \setminus j} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Hier können wir alle Erzeuger $\mathbf{e}_{J \setminus I}$ durch $\mathbf{e}_{J \setminus I} - \mathbf{e}_j$ ersetzen. Da $j \in I_i$ gilt, muss es ein $k_i \in I_i$ geben, sodass $j = k_i$ gilt (es gelte o.B.d.A. $i = 1$). Da alle Vektoren

der Form $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$ Erzeuger des obigen Idealtangentenkegels sind, sind unter diesen Erzeugern auch die Vektoren $\mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_j$ für alle $i > 1$. Das wiederum bedeutet, dass wir die Erzeuger der Form $\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_j$ schreiben können als $(\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_{k_i}) + (\mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_j)$. Daher gilt nun schon etwas vereinfacht

$$IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{I_1 \setminus j} - \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_{I_s \setminus k_s} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{k_2} - \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_{k_s} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{J \setminus I} - \mathbf{e}_j \rangle.$$

Die minimalen Erzeuger des Idealtangentenkegels von $P + Q$ in \mathbf{a} sind also (bis auf $\mathbf{e}_{k_s} - \mathbf{e}_j$ und die $\mathbf{e}_{J \setminus I} - \mathbf{e}_j$) von derselben Form wie die minimalen Erzeuger von $IT_{\sum \alpha_k \mathbf{e}_k}(\mathcal{I})$. Allerdings werden die Erzeugervektoren in R wie folgt ersetzt: Jeder minimale Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i \setminus k_i} - \mathbf{e}_{k_i}$ von $IT_{\sum \alpha_k \mathbf{e}_k}(\mathcal{I})$ wird transformiert zu $\mathbf{e}_{I_i \setminus k_i} - \mathbf{e}_j$, bzw. \mathbf{e}_{k_i} geht über auf $\mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_j$, bzw. $\mathbf{e}_{J \setminus I} \rightsquigarrow \mathbf{e}_{J \setminus I} - \mathbf{e}_j$. Dies sind genau n linear unabhängige minimale Erzeugervektoren. Nach Lemma 7 ist der Idealtangentenkegel somit auch unimodular.

2. Fall. Sei nun $j \in J \setminus I$. Analog zum Fall 1 werden diesmal wegen $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j$, für alle $k \in J \setminus j$, alle Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i \setminus k_i} - \mathbf{e}_j$ eliminiert von $(\mathbf{e}_{I_i \setminus k_i} - \mathbf{e}_{k_i}) + (\mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_j)$, und weiters wird \mathbf{e}_{k_i} zu $\mathbf{e}_{k_i} - \mathbf{e}_j$. Wir erhalten also

$$IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{I_1 \setminus k_1} - \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{I_s \setminus k_s} - \mathbf{e}_{k_s}, \mathbf{e}_{k_1} - \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{e}_{k_s} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{J \setminus (I \cup j)} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle$$

und analog zum 1. Fall finden wir n linear unabhängige minimale Erzeuger des Idealtangentenkegels von \mathbf{a} in $P + Q$.

Mit diesen beiden Fällen haben wir alle möglichen Ecken abgedeckt, daher ist $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ zahm. \square

Das Produkt von zwei Koordinatenidealen

Als nächstes betrachten wir das Produkt von zwei beliebigen Koordinatenidealen.

Satz 11. Seien $\mathcal{I} = (x_i : i \in I)$ und $\mathcal{J} = (x_j : j \in J)$ zwei Koordinatenideale in $K[x_1, \dots, x_n]$ mit $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Wir setzen $K := I \cap J$, weiters seien $I_1 = I \setminus K$ und $J_1 = J \setminus K$. Dann ist $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ genau dann zahm, wenn die beiden Ideale entweder disjunkte Wolken besitzen oder wenn eine Wolke in der anderen enthalten ist.

Beweis. Wir betrachten die Newtonpolyeder $P = N(\mathcal{I})$, $Q = N(\mathcal{J})$ und $R = P + Q = N(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})$. Alle Ecken von R sind bekanntlich von der Gestalt $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ mit $i \in I$ und $j \in J$. Dabei müssen einige Fälle unterschieden werden. Es gelte o.B.d.A. $I \cup J = \{1, \dots, n\}$. (Sonst könnten wir die x_i so permutieren, dass $I \cup J = \{1, \dots, k\}$ für ein $k < n$ und dann Lemma 2 anwenden.)

1. Fall. Seien $i = j \in K$. Die Idealtangentenkegel von P in \mathbf{e}_i werden erzeugt von den n Vektoren $\mathbf{e}_{K \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_i$ bzw. \mathbf{e}_{J_1} während in Q gilt: $IT_{\mathbf{e}_i}(\mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{K \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{I_1}, \mathbf{e}_{J_1} - \mathbf{e}_i \rangle$. Das impliziert

$$IT_{2\mathbf{e}_i}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{K \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{J_1} - \mathbf{e}_i \rangle.$$

Der Idealtangentenkegel von $2\mathbf{e}_i$ in R ist somit simplizial und unimodular (Genauer: $IT_{2\mathbf{e}_i}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})$ ist gleich $IT_{\mathbf{e}_i}((x_I, x_J))$). Wir erhalten in der x_i^2 -Karte denselben Kartenausdruck wie in der x_i -Karte der Explosion im Ideal $\mathcal{I} + \mathcal{J}$!

2. Fall. Seien $i, j \in K$, mit $i \neq j$. Wegen $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j = \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_i) + \frac{1}{2}(2\mathbf{e}_j)$ ist $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ keine Ecke von R .

3. Fall. Sei $i \in K$ und $j \in J_1$. Für den Idealtangentenkegel von R in $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ gilt

$$\begin{aligned} IT_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) &= \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{K \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{K \setminus i} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{I_1}, \mathbf{e}_{J_1 \setminus j} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle \\ &= \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_{K \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{J_1 \setminus j} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle. \end{aligned}$$

Wie sich der Leser leicht überzeugen kann, sind dies wieder genau n linear unabhängige Erzeuger von $IT_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})$, deren Volumen ± 1 beträgt. Anders ausgedrückt: auch die Karten $x_i x_j$ mit $i \in I \cap J$ und $j \in J \setminus I$ sind immer glatt.

4. Fall. Sei $i \in I_1$ und $j \in K$. Symmetrisch zum dritten Fall.

5. Fall. Seien zuletzt $i \in I_1$ und $j \in J_1$. Hier bekommen wir Probleme mit der Simplicialität. Wir erhalten nämlich für den Idealtangentenkegel von R in der Ecke $\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$:

$$IT_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}) = \mathbb{N}\langle \mathbf{e}_K - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_K - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{I_1 \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{J_1 \setminus j} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle.$$

Dies sind $2|K| + |I_1| + |J_1| = n + |K|$ minimale Erzeuger. Wir können ein Erzeugendensystem mit n Erzeugern im folgenden Fall finden: Ist $K = I \cap J = \emptyset$, dann bilden die Wolken der beiden Ideale eine Partition von $\{1, \dots, n\}$. Nach Satz 9 ist $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ zahm. Sonst ist der Idealtangentenkegel für $i \in I_1$ und $j \in J_1$ nie simplicial, da immer zu viele minimale Erzeuger der Form $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ bzw. $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j$ für alle $k \in K$ vorhanden sind.

Die Idealtangentenkegel von R in Ecken wie im Fall 5 sind also nur für Ideale mit disjunkten Wolken simplicial, während die Ecken wie in den anderen 4 Fälle nie Probleme machen. Gilt also $I_1 = \emptyset$ oder $I_2 = \emptyset$, so ist $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ ebenso zahm. Dann existieren keine Ecken wie im Fall 5 in R . Somit haben wir alle Behauptungen gezeigt. \square

Das Produkt von drei Koordinatenidealen

Wir haben in Satz 11 gesehen, wann die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum das Produkt von zwei Koordinatenidealen glatt ist. Nun betrachten wir das Produkt von drei Koordinatenidealen. Mit Hilfe von Maple können wir für drei Faktoren alle Fälle für bestimmte n durchprobieren: Wir berechnen wieder die Idealtangentenkegel zu jeder Ecke des assoziierten Newtonpolyeders. Wesentlich dabei ist, wie sich die Wolken der drei Ideale zueinander verhalten. Wir benötigen noch folgende Notation:

Für zwei Mengen I, J bezeichne $I \Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ die *symmetrische Differenz* von I und J . Speziell für $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt $I \Delta J = \{k : k \notin I \cap J\}$.

Wir betrachten also drei Koordinatenideale $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ in $K[x_1, \dots, x_n]$ mit $\mathcal{I} := (x_i : i \in I)$, $\mathcal{J} := (x_j : j \in J)$, $\mathcal{K} := (x_k : k \in K)$, für $I, J, K \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dabei braucht man mindestens Dimension $n = 7$, um man alle möglichen Schnitte der drei Wolken modellieren zu können. Insgesamt gibt es dann 2^7 verschiedene Konfigurationen der Wolken (wobei man sofort einige ausschließen kann, z.B., wenn eine Wolke die leere Menge ist). Maple liefert (in annehmbarer Zeit!) eine Liste der zahmen Ideale.

Sei $\mathcal{P} = \mathcal{I} \cdot \mathcal{J} \cdot \mathcal{K}$ mit Wolke $P = I \cup J \cup K$. Dann \mathcal{P} zahm, wenn

- (1) $P = I \dot{\cup} J \dot{\cup} K$,
- (2) $P = J \dot{\cup} K$ und $I \subseteq J$,
- (3) $P = I \cup J = I \cup K = J \cup K$ und $I \Delta J \subseteq K$, $I \Delta K \subseteq J$, $J \Delta K \subseteq I$.
- (4) $P = K$ mit $(I \cup J) \subseteq K$,

Bemerkung. Seltsam ist hier Punkt (3). Ein Beispiel dazu: Seien $n = 4$ und $I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{1, 2, 4\}$, $K = \{1, 3, 4\}$. Die zugehörigen Ideale definieren 3 Geraden im \mathbb{A}^4 , die in einem 3-dimensionalen Unterraum von \mathbb{A}^4 enthalten sind.

Hier sieht man schon ein wenig Struktur. Das Produktideal $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} \cdot \mathcal{K}$ ist zahm, wenn schon $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ zahm war und zusätzlich K ist disjunkt zu $I \cup J$ ist. Diese Überlegung beinhaltet die Fälle (1) und (2). Schwieriger ist die Erklärung bei (3) und (4): Hier wird die Singularität der Explosion in $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ offenbar durch Multiplikation mit \mathcal{K} "gezähmt". Wie beim Rosenbergyideal wird eine Ecke mit nichtsimplizialen Idealtangentenkegel von $N(\mathcal{I} \cdot \mathcal{J})$ durch Summenbildung mit $N(\mathcal{K})$ gestreckt.

Vermutung für das Produkt von vier Idealen. Sei nun $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3 \cdot \mathcal{I}_4$ mit jeweiligen Wolken I_i bzw. I . Dann ist \mathcal{I} zahm, wenn

- (1) $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{I}_3$ zahm ist, und $I_4 \supseteq I_1 \cup I_2 \cup I_3$ oder $I_4 \cap (I_1 \cup I_2 \cup I_3) = \emptyset$ gilt, (Dies haben wir sogar schon allgemeiner bewiesen, vgl. Sätze 9, 10)
- (2) die Wolken der vier Ideale wieder von der speziellen Gestalt $I_i \cup I_j = I$ und $I_i \triangle I_j \subseteq I_k$ für alle $i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3, 4\}$ sind.

3.5 Bauchige Mengen

Wir gehen der Frage nach, wann die Explosion des \mathbb{A}^n in einem beliebigen Produkt von Koordinatenidealen glatt ist. Eine ähnliche Fragestellung kommt beim Problem der Kompaktifizierung des Komplements von Untervarietäten einer glatten algebraischen Varietät vor. Erstmals wurde die Kompaktifizierung von Konfigurationenräumen von Fulton und MacPherson in [FM] studiert. In dieser Arbeit werden Konfigurationenräume $F(n, X)$ von glatten algebraischen Varietäten X betrachtet. Dabei ist $F(n, X)$ ein Raum von n -Tupeln von paarweise verschiedenen Punkten in X :

$$F(n, X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Durch eine Folge von Explosionen wird eine Kompaktifizierung $X[n]$ von $F(n, X)$ konstruiert, sodass das Komplement des ursprünglichen Konfigurationenraumes ein normaler Kreuzungsddivisor ist. De Concini und Procesi haben in [DP] diese Idee verallgemeinert und *wunderbare Modelle* von endlichen Familien *linearer* Unterräume eines Vektorraums X eingeführt. Dabei wird für ein derartiges *Arrangement* von linearen Unterräumen ein Modell konstruiert, sodass wieder das Komplement dieser Unterräume unverändert bleibt und die Unterräume durch einen normalen Kreuzungsddivisor ersetzt werden. Eine Familie \mathcal{G} von Unterräumen, die diese Bedingung erfüllt, heißt *bauchige Menge* (engl. *Building Set*).

Wunderbare Modelle wurden später von MacPherson und Procesi in [MP] auf konische Varietäten über \mathbb{C} verallgemeinert. Dabei verwenden sie konische Stratifizierungen und verallgemeinern den Begriff der bauchigen Menge. Spezielle Kompaktifizierungen werden auch von Hu [Hu] und Ulyanov [U] betrachtet. Eine Verallgemeinerung auf Kompaktifizierungen von Arrangements von Unterräumen einer glatten Varietät stammt schließlich von Li Li, siehe [Li]. Feichtner betrachtet in [Fe] wunderbare Kompaktifizierungen vom kombinatorischen Standpunkt aus.

Wir werden nun bauchige Mengen einführen. Dabei folgen wir hauptsächlich der Darstellung in [DP], da wir ohnehin nur Verschwindungsmengen von Idealen $\mathcal{I} = (x_i, i \in I)$ betrachten, die uns immer lineare Unterräume liefern. Dann werden wir mit unserem Zahmheitskriterium beweisen, dass die Explosion in einem Produkt $\prod_i G_i$, mit

$G_i := (x_j : j \in I_i)$, glatt ist, wenn $\mathcal{G} := \{G_i\}$ eine bauchige Menge ist. Allerdings werden wir auch sehen, dass diese Bedingung zu stark ist. Wir können sogar schon in kleiner Dimension Ideale \mathcal{S}_i finden, für die gilt: Die Ideale bilden keine bauchige Menge, das Produkt $\prod_i \mathcal{S}_i$ ist aber trotzdem zahn.

Wir definieren zuerst bauchige Mengen dual und werden dann den Zusammenhang zwischen den Koordinatenidealen und den zugehörigen Vektorräumen erläutern. Betrachte also einen Vektorraum $V \cong \mathbb{R}^n$. Sei V^* der Dualraum zu V . Sei \mathcal{C} eine endliche Menge von nichttrivialen Unterräumen von V^* , die abgeschlossen unter Summenbildung ist. Dabei ist auch $V^* \in \mathcal{C}$ erlaubt. Wir nennen \mathcal{C} ein *Arrangement* von Unterräumen.

Sei $U \in \mathcal{C}$. Dann sind $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{C}$ mit $k \geq 2$ eine *Zerlegung* von U , wenn

$$U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

und wenn für jeden Unterraum $A \subseteq U$ in \mathcal{C} auch alle $A \cap U_i$ in \mathcal{C} sind und

$$A = (A \cap U_1) \oplus \dots \oplus (A \cap U_k)$$

gilt. Wenn ein Unterraum U keine Zerlegung in \mathcal{C} besitzt, so heißt U *irreduzibel*. Die Menge der irreduziblen Elemente in \mathcal{C} bezeichnen wir mit \mathcal{F} bzw. $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

Beispiel 20. (1) Sei $V^* = {}_K\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_3 \rangle$. Sei $\mathcal{C} = \{U_1, \dots, U_7\}$ ein Arrangement mit $U_1 = {}_K\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, $U_2 = {}_K\langle \mathbf{u}_1 \rangle$, $U_3 = {}_K\langle \mathbf{u}_2 \rangle$, $U_4 = {}_K\langle \mathbf{u}_3 \rangle$, $U_5 = {}_K\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, $U_6 = {}_K\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ und $U_7 = {}_K\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle$. Dann ist $U_1 = U_5 \oplus U_4$ eine Zerlegung von U_1 , denn: U_2 und U_3 sind irreduzibel und $U_6, U_7 \subseteq U_1$ lassen sich als direkte Summen $U_i \cap U_4 \oplus U_i \cap U_5$ mit Elementen aus \mathcal{C} darstellen.

(2) Es sei $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{U_3\}$. Dann ist $U_1 = U_4 \oplus U_5$ keine Zerlegung, da $U_6 \subseteq U_1$ in \mathcal{C}' ist, aber $U_6 \cap U_5 = {}_K\langle \mathbf{u}_2 \rangle \notin \mathcal{C}'$. Außerdem ist U_6 weder in U_4 noch in U_5 enthalten.

Satz 12. *Jeder Unterraum U in \mathcal{C} besitzt eine eindeutige Zerlegung $U := \bigoplus_{i=1}^k U_i$ in irreduzible Unterräume U_i . Wenn $A \subseteq U$ irreduzibel ist, so gilt bereits $A \subseteq U_i$ für ein i .*

Beweis. Wir zeigen zu Beginn die zweite Behauptung des Satzes. Sei dazu $A \subseteq U = \bigoplus_{i=1}^k U_i$ die eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente. Dann muss nach Definition der Zerlegung $A = \bigoplus_{i=1}^k (A \cap U_i)$ gelten. Für einen Unterraum $B \subseteq A$ in \mathcal{C} muss ebenso $B = \bigoplus_{i=1}^k (B \cap U_i) = \bigoplus_{i=1}^k B \cap (A \cap U_i)$ sein. Das impliziert, dass A irreduzibel ist, außer $A \subseteq U_i$ für ein i : Dann sind für alle $j \neq i$ die Unterräume $A \cap U_j = 0 \notin \mathcal{C}$.

Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, dass U zwei verschiedene Zerlegungen $\bigoplus_{i=1}^k U_i$ bzw. $\bigoplus_{j=1}^l W_j$ in irreduzible Komponenten besitzt. Wähle ein $U_i \subseteq U$. Da U_i ein irreduzibler Unterraum von U ist, so muss U_i in einem W_j enthalten sein. Da W_j irreduzibel ist, muss es in einem U_m enthalten sein, d.h., es gilt $U_i \subseteq W_j \subseteq U_m$. Daraus folgt $U_i = U_m$ (direkte Summe!) und $U_i = W_j$. Die Zerlegung ist also eindeutig.

Wir zeigen die Existenz mit Induktion über die Dimension von U . Für $\dim(U) = 1$ ist $U = U$ die einzige Darstellung von U , und der einzige Unterraum $A \subseteq U$ in \mathcal{C} ist U selbst, daher ist auch die zweite Bedingung für eine Zerlegung erfüllt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass alle $W \in \mathcal{C}$ mit $\dim(W) < d$ eine irreduzible Zerlegung besitzen. Sei $U \in \mathcal{C}$ von Dimension $d + 1$. Wenn U selbst irreduzibel ist,

sind wir fertig. Sonst besitzt U eine Zerlegung $\bigoplus_{i=1}^k U_i$, wobei $\dim(U_i) < d + 1$ für alle i gilt. Daher besitzt jedes U_i eine irreduzible Zerlegung $U_i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} U_{ij}$ und für alle $A \subseteq U_i$ in \mathcal{C} ist $A = \bigoplus_{j=1}^{k_i} (A \cap U_{ij})$. Somit ist $U = \bigoplus_{i,j} U_{ij}$ eine direkte Summe von irreduziblen Unterräumen. Wir müssen noch die Bedingung an alle $B \subseteq U$ in \mathcal{C} nachprüfen: Für jeden Unterraum $B \subseteq U$ gilt nach Definition der Zerlegung $B = \bigoplus_{i=1}^k (B \cap U_i)$. Da $B \cap U_i \in \mathcal{C}$ ein Unterraum von U_i ist, existiert die irreduzible Zerlegung $B \cap U_i = \bigoplus_{j=1}^{k_i} (B \cap U_{ij})$. Also folgt $B = \bigoplus_{i,j} (B \cap U_{i,j})$. \square

Eine Zerlegung wie im obigen Satz nennen wir die *irreduzible Zerlegung* von U .

Wir listen nun einige wichtige Eigenschaften von Zerlegungen auf, die wir für die Charakterisierung von bauchigen Mengen brauchen werden.

Korollar. (1) Sei U in \mathcal{C} mit $U = \bigoplus_{i=1}^k U_i$, wobei alle U_i in \mathcal{C} seien. Dies ist genau dann eine Zerlegung von U , wenn für jedes irreduzible A in \mathcal{C} gilt: Aus $A \subseteq U$ folgt $A \subseteq U_i$ für ein i .

(2) Für zwei irreduzible Unterräume A, B in \mathcal{C} ist entweder $A + B$ irreduzibel oder $A \oplus B$ ist eine irreduzible Zerlegung.

(3) Wenn $A = \sum A_i$ gilt, wobei alle A_i in \mathcal{C} irreduzibel seien, so sind die irreduziblen Komponenten von A auch Summen von einigen A_i .

Beweis. Für (1) sei zuerst $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ eine Zerlegung von U . Wir können jedes U_i in seine irreduziblen Komponenten U_{ij} zerlegen. Dann muss jedes irreduzible $A \subseteq U$ in \mathcal{C} nach dem obigen Satz in einem U_{ij} und damit auch in einem U_i enthalten sein. Die andere Implikation folgt auch sofort: Sei $U = \bigoplus_i U_i$ und sei jedes irreduzible $A \subseteq U_i$ für ein i . Für einen beliebigen Unterraum $B \subseteq U$ gibt es eine eindeutige irreduzible Zerlegung $B = \bigoplus_{j=1}^l B_j$, sodass jedes B_j in einem U_i enthalten ist. Dann ist für alle i der Schnitt $B \cap U_i = \bigoplus_j B_j$ eine Summe über j mit $B_j \subseteq U_i$. Dies impliziert $B = \bigoplus_{i=1}^k (B \cap U_i)$.

(2) Seien nun $A, B \subseteq U$ irreduzibel. Dann gibt es nach dem obigen Satz zwei Unterräume U_i und U_j aus der irreduziblen Zerlegung von U , sodass $A \subseteq U_i$ und $B \subseteq U_j$. Somit ist

$$(A + B) \cap U_l = \begin{cases} A & \text{falls } l = i, \\ B & \text{falls } l = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition der Zerlegung ist $A + B = \bigoplus_{l=1}^k ((A + B) \cap U_l) = (A \cap U_i) \oplus (B \cap U_j)$. Wenn $i = j$ ist, dann ist $A + B$ irreduzibel, sonst ist $A + B = A \oplus B$ die irreduzible Zerlegung. Denn für alle $C \subseteq A \oplus B \subseteq U$ in \mathcal{C} gilt $C = (C \cap U_i) \oplus (C \cap U_j) = (C \cap A) \oplus (C \cap B)$. Damit ist auch (2) erledigt.

(3) schließlich folgt sofort aus (2). \square

Satz 13. Sei $U = \bigoplus_{i=1}^k U_i$ in \mathcal{C} eine Zerlegung von U . Sei $C \subsetneq U$ ein Element in \mathcal{C} , das maximal in U ist. Dann existiert ein $j \leq k$, sodass $C_j = U_j \cap C$ in \mathcal{C} , mit $C_j \subsetneq U_j$ maximal in U_j , und $C = C_j \oplus (\bigoplus_{i \neq j} U_i)$.

Beweis. Wir können $C = \bigoplus_{i=1}^k (U_i \cap C)$ nach Definition der Zerlegung schreiben. Da C echt in U enthalten ist, existiert mindestens ein $C_j := U_j \cap C \subsetneq U_j$. Dies liefert $C \subseteq C_j \oplus (\bigoplus_{i \neq j} U_i) \subsetneq U$. Da C maximal in U ist, muss Gleichheit gelten. Damit haben wir das C_j mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. \square

Nun kommen wir zur Definition von bauchigen Mengen. Wir werden zwei weitere äquivalente Charakterisierungen beweisen. Außerdem könnte man bauchige Mengen auch direkt, ohne Übergang zum Dualraum, definieren. Diese Definition ist aber nicht sehr handlich.

Sei \mathcal{G} eine nichtleere Menge von nichttrivialen Unterräumen von V^* . Sei das Arrangement $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ die Menge von Unterräumen, die man als Summe von Elementen in \mathcal{G} darstellen kann, und seien $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}_{\mathcal{G}}}$ die irreduziblen Elemente in $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$.

Dann heißt \mathcal{G} *bauchige Menge*, wenn gilt: Jedes Element $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ ist die direkte Summe $C = \bigoplus_{i=1}^k G_i$ der Menge der maximalen Elemente G_1, \dots, G_k in \mathcal{G} , die in C enthalten sind.

Satz 14. *Unter diesen Bedingungen kann man jedes B aus $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ und $B \subseteq C$ darstellen als $B = \bigoplus_{i=1}^k (B \cap G_i)$, d.h., $C = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ ist eine Zerlegung von C .*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jedes $B \subseteq C$ in $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^k (B \cap G_i)$ wieder gleich B ist. Wähle dazu ein $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{G}}$. Nach der Definition der bauchigen Menge \mathcal{G} gilt $C = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$, wobei die G_i die maximalen Elemente von \mathcal{G} sind, die in C enthalten sind. Sei nun $B \subseteq C$ in $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ ein Unterraum. Wieder nach Definition der bauchigen Menge können wir B als direkte Summe $B = \bigoplus_{j=1}^s B_j$ schreiben, wobei die B_j die maximalen Elemente aus \mathcal{G} sind, die in B enthalten sind. Da die G_i maximal sind, muss jedes B_j in einem G_i enthalten sein (denn sonst wäre $B_j + G_i \subseteq C$ in \mathcal{C} , was einen Widerspruch zu Maximalität der G_i liefern würde). Daher ist jedes $B \cap G_i$ eine direkte Summe von B_j . Da kein B_j in mehreren G_i 's vorkommen kann, ist somit auch $B = \bigoplus_{i=1}^k (B \cap G_i)$. \square

Man kann bauchige Mengen auf unterschiedliche Weise charakterisieren, wir zeigen nun zwei andere äquivalente Darstellungen (vgl. [DP, Thm. 2.3]).

Satz 15. *Sei \mathcal{G} wie oben eine Menge von Unterräumen in V^* . Dann sind äquivalent:*

(1) \mathcal{G} ist eine bauchige Menge.

(2) Es gelten:

(a) $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}$ und

(b) Wenn $A, B \in \mathcal{G}$ sind und $A + B$ keine Zerlegung ist, dann ist schon $A + B \in \mathcal{G}$ (speziell gilt dies natürlich für $A \cap B \neq \{0\}$).

(3) \mathcal{G} erfüllt (2) (a) und

(b') Wenn $A, B \in \mathcal{G}$ und $A = \bigoplus_{i=1}^s A_i$ die irreduzible Zerlegung von A in $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ und $B \supseteq A_i$ für ein i ist, so ist schon $A + B$ in \mathcal{G} .

Beweis. Zuerst zeigen wir die Richtung (1) \implies (2). Zunächst die Bedingung (a): Sei F irreduzibel in $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$. Dann hat F nach Definition eine Zerlegung in \mathcal{G} . Da jedoch F irreduzibel in \mathcal{C} ist, so muss schon F selbst in \mathcal{G} liegen. Für (b) nehmen wir an, dass für zwei Unterräume $A, B \in \mathcal{G}$ die Summe $A + B$ keine Zerlegung ist. Wir können $A + B$ als Summe der maximalen Elemente $A + B = \bigoplus_i G_i$ in \mathcal{G} schreiben. Dann müssen A, B in einem G_i enthalten sein, denn: Angenommen es existiert kein i , sodass $A \subseteq G_i$, wobei $G_i \subseteq A + B$ für alle i ist. Wähle ein derartiges G_i aus der obigen Zerlegung, wobei $A \cap G_i \neq \{0\}$. Da A und G_i in \mathcal{G} liegen, ist auch $A + G_i$ in \mathcal{G} . Allerdings ist ebenso $A + G_i \subseteq A + B$, was einen Widerspruch zur Maximalität von G_i liefert. Da $A + B$ keine Zerlegung ist, so ist $A + B$ irreduzibel. Daher müssen A, B beide in demselben G_i enthalten sein (nach obigem Korollar, (1)). Daraus folgt $A + B = G_i \in \mathcal{G}$.

Wir nehmen nun an, dass \mathcal{G} beide Bedingungen von (2) erfüllt. Um (3) (b') zu zeigen, seien $A, B \in \mathcal{G}$ zwei Unterräume, sodass $B \supseteq A_i$ für ein i gilt. Da B eine der irreduziblen Komponenten von A enthält, ist die Summe $A + B$ nicht direkt, also keine Zerlegung. Daher ist nach Bedingung (b) auch $A + B$ in \mathcal{G} .

Schließlich gelte (3). Wir müssen zeigen, dass wir jedes C in $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ als direkte Summe von maximalen Elementen von C schreiben können, die zusätzlich in \mathcal{G} enthalten sind. Wir können C in irreduzible Elemente in $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ zerlegen, also $C = \bigoplus_{i=1}^k C_i$. Seien G_l die maximalen Elemente in \mathcal{G} , die in C enthalten sind. Sei weiters beispielsweise $G_l = A_1 \oplus \dots \oplus A_r$ die Zerlegung in irreduzible Elemente. Da $A_i \subseteq G_l$ in C enthalten ist, und irreduzibel ist, so muss nach obigem Satz (bzw. Korollar (1)) jedes A_i in einem C_j enthalten sein. Nach (3) (b') ist dann auch $G_l + C_j \subseteq C$ in \mathcal{G} . Da G_l allerdings maximal ist, muss $C_j \subseteq G_l$ gelten. Nach Korollar (2) muss jedes G_i eine direkte Summe von einigen C_j sein. Wenn zwei verschiedene G_i dasselbe C_j enthalten würden, wäre auch ihre Summe in \mathcal{G} . Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität der G_i . Insgesamt gilt: Da \mathcal{G} alle irreduziblen Elemente enthält, enthält es insbesondere die C_j . Jedes C_j ist in genau einem G_i enthalten. Daher ist jedes G_i die direkte Summe von gewissen C_j , wobei jedes C_j nur in einem G_i vorkommt. Daher können wir auch C als direkte Summe der G_i darstellen. \square

Es bleibt anzumerken, dass die Zerlegung von $C = \bigoplus_i G_i$ in \mathcal{G} eindeutig ist. Dies folgt aus der Maximalität der G_i . Außerdem gilt für alle A in \mathcal{G} , $A \subseteq C$, dass ein i existiert mit $A \subseteq G_i$. Zum besseren Verständnis noch einige Beispiele für bauchige Mengen.

Beispiele. Sei \mathcal{C} ein Arrangement von Unterräumen.

(1) \mathcal{C} ist eine bauchige Menge. Dies ist klar, da wir jedes $C \in \mathcal{C}$ als "direkte Summe" des maximalen Unterrichts C darstellen können.

(2) $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ ist eine bauchige Menge. Dies folgt aus Satz 15 (3): Bedingung (a) ist erfüllt und für (b') betrachte zwei Elemente $A, B \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$. Dann ist A schon die irreduzible Zerlegung von A , und falls $B \supseteq A$, so ist $B + A = A$ schon in $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$.

(3) Ein konkretes Beispiel: Sei $V^* = K^3$ mit Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ und sei $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, G_3\} = \{K\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, K\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle, K\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle\}$. Dann ist \mathcal{G} keine bauchige Menge, da

$$K^3 = K\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = G_1 + G_2 = G_1 + G_3 = G_2 + G_3$$

keine direkte Summe von maximalen Elementen von \mathcal{G} ist.

Wenn wir jedoch $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cup \{K\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle\}$ betrachten, so sind alle Summen direkt, da $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}'$.

Wir können bauchige Mengen auch direkt definieren, ohne in den Dualraum überzuwechseln. Hier arbeitet man dann mit minimalen Schnitten von Unterräumen. Da wir ohnehin die Ideale der Verschwindungsmengen betrachten, ist es für uns leichter, im Dualraum zu bleiben. Der Vollständigkeit halber gebe ich noch die gängige Definition für den "Primalraum" an (vgl. hierzu auch [Li] und [MP]). Beachte: diese Definition gilt allgemeiner für Untervarietäten einer nichtsingulären Varietät Y , nicht nur für lineare Unterräume. Zuerst brauchen wir noch den Begriff des Arrangements von Untervarietäten.

Ein (einfaches) *Arrangement von Untervarietäten* von Y ist eine endliche Menge \mathcal{S} bestehend aus nichtsingulären, abgeschlossenen Untervarietäten $S_i \subsetneq Y$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Alle Schnitte $\bigcap_i S_i$ sind regulär (schematheoretisch), d.h., die definierenden Ideale

I_{S_i} und I_{S_j} von je zwei S_i und S_j in \mathcal{S} erfüllen die Gleichung $I_{S_i} + I_{S_j} = I_{S_i \cap S_j}$ und allgemein für k Untervarietäten S_{j_i} in \mathcal{S}

$$\sum_{i=1}^k I_{S_{j_i}} = I_{S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_k}}.$$

(2) $S_i \cap S_j$ ist entweder gleich einem S_k aus \mathcal{S} oder leer.

Bemerkung. Bedingung (1) bedeutet, dass ein Arrangement von Untervarietäten insbesondere ein *Mikado Schema* ist. (Ein Mikado-Schema ist ein Schema, das eine Vereinigung von glatten Komponenten ist, sodass alle möglichen Durchschnitte dieser Komponenten (schematheoretisch) regulär sind.) Näheres dazu findet sich in [Ha3, Li].

Beispiel 21. (1) Sei $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$ in \mathbb{A}^3 mit $I_{S_1} = (x, y)$, $I_{S_2} = (x, z)$ und $I_{S_3} = (x, y, z)$. Dann ist \mathcal{S} ein Arrangement.

(2) Sei nun $\mathcal{S} = \{U, V, W, U \cap V, U \cap W, V \cap W, U \cap V \cap W\}$, wobei U die xz -Ebene mit $I_U = (y)$, V die xy -Ebene mit $I_V = (z)$ und W ein Paraboloid mit $I_W = (x^2 - y - z)$ seien. Dann ist \mathcal{S} kein Arrangement in \mathbb{A}^3 , denn: Es ist $U \cap V \cap W$ der Nullpunkt mit Ideal (x, y, z) . Es gilt aber

$$I_U + I_V + I_W = (y, z, x^2 - y - z) = (x^2, y, z).$$

Daher ist dieser Schnitt nicht regulär.

Sei \mathcal{S} ein Arrangement von Untervarietäten von Y . Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$ heißt *bauchige Menge* in \mathcal{S} , wenn für jedes $S \in \mathcal{S}$ alle minimalen Elemente in \mathcal{G} , die S enthalten, einen transversalen Schnitt haben. Zusätzlich muss dieser Schnitt genau S sein. (Transversaler Schnitt von nichtsingulären Untervarietäten A_1, \dots, A_k bedeutet hier, dass für jeden Punkt $y \in Y$ gilt:

$$T_{A_1, y}^\perp \oplus \dots \oplus T_{A_k, y}^\perp,$$

d.h., die orthogonalen Komplemente der Tangentialräume in Y bilden eine direkte Summe im Cotangentialraum T_y^* .)

Nun kommen wir wieder zu Produkten von Koordinatenidealen zurück. Wir haben uns ja die Frage gestellt, wann ein derartiges Produkt zahm ist. In [Li, Thm. 3.3.] wird induktiv gezeigt, dass die Explosion in einem Produkt von Idealen glatt ist, wenn diese Ideale eine bauchige Menge bilden. Wir werden dies nun mit unserem Zahmheitskriterium beweisen. Allerdings ist die Bedingung, dass die Ideale eine bauchige Menge bilden, keineswegs notwendig. Wir werden dazu ein Beispiel angeben.

Zuerst überlegen wir noch genauer die Beziehung von *Koordinatenidealen* im Koordinatenring $K[x_1, \dots, x_n]$ des \mathbb{A}_K^n zu *Koordinatenunterräumen* von K^n : Wir identifizieren ein Koordinatenideal $(x_i, i \in I)$, wobei die Wolke $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei, mit dem Koordinatenunterraum $V(x_i, i \in I)$. Wir nennen daher eine Menge \mathcal{C} von Idealen C_i ein *Arrangement (von Idealen)*, wenn die zugehörigen Koordinatenunterräume ein Arrangement in \mathbb{A}^n bilden. Entsprechend heißt eine Menge \mathcal{G} eine *bauchige Menge (von Idealen)*, wenn die zugehörigen Koordinatenunterräume eine bauchige Menge in \mathbb{A}^n bilden.

Betrachte nun $\mathbb{A}_K^n = K^n$ als Vektorraum über K . In der Schreibweise von oben ist $V = K^n$. Sei \mathcal{P} ein Arrangement von Unterräumen und sei \mathcal{C} die Menge aller Unterräume in $V^* \cong V$, die dual zu allen Unterräumen in \mathcal{P} und ihren Schnitten sind. Ist $P = V(x_i : i \in I)$ ein Koordinatenunterraum, dann ist P^* das Erzeugnis $\langle x_i, i \in I \rangle$

in V^* . Mit der üblichen Identifikation $V \cong V^*$ (euklidisches Skalarprodukt auf V) können wir schließlich $P^* = C$ in \mathcal{C} mit $V(x_i : i \notin I)$ identifizieren. Für zwei Ideale $C_i = (x_i, i \in I)$, $C_j = (x_j, j \in J)$ in einem Arrangement \mathcal{C} gilt

$$V(C_i + C_j) = V(x_k, k \in I \cup J) = V(C_i) \cap V(C_j).$$

Die Summe $C_i \oplus C_j$ ist *direkt*, wenn $I \cap J = \emptyset$.

Die Explosion in bauchigen Mengen

In diesem Abschnitt wollen wir mit unserem Zahmheitskriterium zeigen, dass ein Produkt von Koordinatenidealen zahm ist, wenn diese Ideale eine bauchige Menge \mathcal{G} im Arrangement $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ bilden. Beachte dabei: Für zwei Ideale C_i, C_j in \mathcal{C} ist immer $C_k = C_i + C_j$ in \mathcal{C} enthalten. Wir gehen in zwei Schritten vor: Zuerst zeigen wir, dass das Produkt $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$ aller Ideale $C_i \in \mathcal{C}$ zahm ist. Wir haben schon gezeigt (Satz 15), dass in einer bauchigen Menge \mathcal{G} in \mathcal{C} alle irreduziblen Elementen C_i, C_j in \mathcal{C} enthalten sind. Es sind also alle nicht-direkten Summen von Elementen C_i, C_j in \mathcal{G} . Zusätzlich sind nicht notwendig einige direkte Summen $C_i \oplus C_j$ in \mathcal{G} . (Wenn also z.B. $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$, dann sind keine direkten Summen in der bauchigen Menge enthalten)

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass man Faktoren $C_k = C_i \oplus C_j$ (beliebige direkte Summen von C_i) im Produktideal $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \prod_i C_i$ weglassen kann, ohne die Zahmheit des Produktideals zu zerstören.

Lemma 9. *Seien $\mathcal{S}_i := (x_k : k \in I_i)$ Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$. Sei $\mathcal{S} := \prod_{i < j} (\mathcal{S}_i + \mathcal{S}_j)$ das Produkt der paarweisen Summen der \mathcal{S}_i . Dann ist die Explosion von \mathbb{A}^n in \mathcal{S} glatt.*

Beweis. Wir betrachten wieder die Idealtangentenkegel zu den Ecken des Newtonpolyeders von \mathcal{S} . Wir müssen zeigen, dass der Idealtangentenkegel zu jeder Ecke von $N(\mathcal{S})$ simplizial und damit nach Lemma 7 automatisch unimodular ist. Wir werden die obige Aussage mit Induktion über die Anzahl r der Ideale zeigen. Für $r = 2$ gilt $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$. Dieses Ideal ist klarerweise zahm.

Wir führen folgende Notation ein: Wir identifizieren ein \mathcal{S}_i mit seiner Wolke $I_i \subseteq \{1, \dots, n\}$. Es bezeichne $\mathcal{S}_{ij} := \mathcal{S}_i + \mathcal{S}_j$ und entsprechend $I_{ij} := I_i \cup I_j$. Seien $P_{ij} = N(\mathcal{S}_{ij})$ die assoziierten Newtonpolyeder.

Nun zum Induktionsschritt von r auf $r+1$: Angenommen, das Ideal $\mathcal{S} = \prod_{i < j} (\mathcal{S}_{ij})$ in $K[x_1, \dots, x_n]$ ist zahm. Es ist zu zeigen, dass auch $\mathcal{S} \cdot (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_{r+1}) \cdots (\mathcal{S}_r + \mathcal{S}_{r+1})$ zahm ist. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $\mathcal{J} := \mathcal{S}_{r+1}$ mit Wolke $J = I_{r+1}$. Zuerst behandeln wir wieder die üblichen Spezialfälle: Wenn $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{J}$, dann ist $\mathcal{S}_i + \mathcal{J} = \mathcal{J}$ für alle i und das obige Produkt lautet $\mathcal{S} \cdot \mathcal{J}^r = (\mathcal{S} \cdot \mathcal{J}) \cdot \mathcal{J}^{r-1}$. Der erste Faktor ist nach Satz 10 zahm und durch die restlichen $r-1$ Faktoren werden die Idealtangentenkegel der assoziierten Newtonpolyeder nach Korollar zu Satz 11 nicht verändert.

Im Weiteren gehen wir folgendermaßen vor: Wir betrachten zuerst den Idealtangentenkegel in einer Ecke des Newtonpolyeders $N(\mathcal{S})$ und schauen, wie die minimalen Erzeuger dieses Kegels bei der Summenbildung von $N(\mathcal{S})$ mit den $N(\mathcal{S}_i + \mathcal{J})$ transformiert werden. Dabei wird schrittweise vorgegangen: Zuerst betrachten wir den Idealtangentenkegel in einer Ecke von $N(\mathcal{S}) + N(\mathcal{S}_1 + \mathcal{J})$, dann in $N(\mathcal{S}) + N(\mathcal{S}_1 + \mathcal{J}) + N(\mathcal{S}_2 + \mathcal{J})$, etc. Formal: Sei $\mathbf{a} := \sum_{i < j} \mathbf{e}_{k_{ij}}$ eine Ecke in $P := N(\mathcal{S}) = \sum_{i < j} P_{ij}$. Dabei ist $k_{ij} \in I_{ij}$ für alle $i < j \leq r$. Es kann also auch $\mathbf{e}_{k_{ij}} = \mathbf{e}_{k_{i'j'}}$ für $ij \neq i'j'$

sein, d.h., \mathbf{a} hat die Form $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{e}_k$ mit $\alpha_k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^n \alpha_k = \binom{r}{2}$ (Anzahl der Faktoren von $\prod_{i<j} \mathcal{S}_{ij}$). Jede derartige Ecke \mathbf{a} ist die Summe von Ecken der P_{ij} . In den Idealtangentenkegeln bedeutet die Summenbildung eines beliebigen Polyeders Q mit P_{ij} einfach, dass zum Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{q}}(Q)$ eines Punktes \mathbf{q} in Q in $IT_{\mathbf{q}+\mathbf{e}_{k_{ij}}}(Q+P_{ij})$ die Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_{k_{ij}}$ bzw. $\mathbf{e}_{I_j} - \mathbf{e}_{k_{ij}}$ für $k_{ij} \in I_{ij}$ dazukommen (nach Lemma 6). Dabei bezeichne $\mathbf{e}_M - \mathbf{e}_k$ die Menge $\{\mathbf{e}_m - \mathbf{e}_k : m \in M\}$ für eine Wolke $M \subseteq \{1, \dots, n\}$. Weiters bezeichne $\mathbf{e}_{M \setminus k} - \mathbf{e}_k$ für ein $k \in M$ die Menge $\{\mathbf{e}_m - \mathbf{e}_k : m \in M \setminus k\}$.

Zuerst betrachten wir eine Ecke \mathbf{a} , für die ein k in einem I_{ij} existiert, sodass das zugehörige $\alpha_k > 0$ ist. Anders ausgedrückt: Zum Vektor \mathbf{e}_k sind in einem Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{e}_k}(\mathcal{S}_{ij})$ die Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i \setminus k} - \mathbf{e}_k$ und $\mathbf{e}_{I_j} - \mathbf{e}_k$ enthalten, also sind diese Erzeuger auch in $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ enthalten.

Behauptung: Es wird ein $k \in I_i$ in mindestens $r - 1$ verschiedenen I_i ausgewählt, sodass die $\mathbf{e}_{I_i \setminus k} - \mathbf{e}_k$ im Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ enthalten sind. Denn: P ist die Minkowskisumme von Newtonpolyedern P_{ij} mit $i < j$. Daher existiert in einem beliebigen P_{ij} eine Ecke \mathbf{e}_α mit $\alpha \in I_i$ oder $\alpha \in I_j \setminus I_i$. Angenommen, es existiert ein i , sodass in \mathcal{S}_{ij} für alle $j \in \{1, \dots, r\} \setminus i$ jeweils ein $\alpha \in I_j \setminus I_i$ in I_{ij} ausgewählt wurde. Wenn nun ein weiteres $k \neq i$ mit derselben Eigenschaft existieren würde, d.h., in allen I_{kj} ist $\alpha \in I_j \setminus I_k$ gewählt worden, erhalten wir einen Widerspruch. In I_{ki} muss nämlich ein $\alpha \in I_k \setminus I_i$ gewählt werden!

Damit haben wir gezeigt, dass es höchstens ein i gibt, sodass *keine* Erzeuger der Form $\mathbf{e}_{I_i \setminus k} - \mathbf{e}_k$ für alle $k \in I_i$ im Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ vorkommen. Somit erhalten wir für jeden Faktor \mathcal{S}_{ij} von \mathcal{S} , in dem $k \in I_i$ gewählt wird, im Idealtangentenkegel zu einer Ecke \mathbf{a} die Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i \setminus k} - \mathbf{e}_k$ und alle $\mathbf{e}_{I_j} - \mathbf{e}_k$.

Seien nun o.B.d.A. I_1, \dots, I_s mit $s \geq r - 1$ die Wolken, die ein k mit der obigen Eigenschaft enthalten. Im Newtonpolyeder zu $\mathcal{S} \cdot (\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}) \cdots (\mathcal{S}_s + \mathcal{S})$ gilt dann für alle Ecken, die eine Summe $\mathbf{a} + \sum_{i=1}^s \mathbf{e}_{k_i}$ mit $\mathbf{e}_{k_i} \in I_i \cup J$ sind: Für jedes Ideal $\mathcal{S}_i + \mathcal{S}$ kommt entweder ein \mathbf{e}_k mit k aus I_i oder k aus $J \setminus I_i$, sodass $\mathbf{e}_{k_i} = \mathbf{e}_k$ gilt, dazu. D.h., wenn $k \in I_i$ ist, dann existieren in $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ Erzeuger der Form $\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_k$ und $\mathbf{e}_{I_j} - \mathbf{e}_k$, die von $IT_{\mathbf{e}_k}(\mathcal{S}_{ij})$ stammen. Denn: Wenn es ein P_{ij} gibt, sodass $k \in I_i$ gewählt wurde, so sind alle Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_k$ und $\mathbf{e}_{I_j} - \mathbf{e}_k$ im Idealtangentenkegel enthalten. Falls ein weiteres $k' \in I_i$ in einem $\mathcal{S}_{i\beta}$ gewählt würde, enthielte der Idealtangentenkegel die Erzeuger $\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_{k'}$, insbesondere $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k'}$. Es ist aber auch $\mathbf{e}_{k'} - \mathbf{e}_k$ ein Erzeuger des Kegels. Widerspruch zu $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ spitz!

Wir gehen nun schrittweise vor und betrachten zuerst $P_1 := P + N(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S})$.

1. Fall. Sei $\mathbf{a} + \mathbf{e}_j$ mit $j \in J \setminus I_1$ die neue Ecke in P_1 . Im Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j}(\mathcal{S}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}))$ kommen die neuen Erzeugervektoren $\mathbf{e}_{J \setminus (j \cup I_1)} - \mathbf{e}_j$ (statt den $\mathbf{e}_{J \setminus j}$) und der zusätzliche Erzeuger $\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_j$ statt \mathbf{e}_{i_1} dazu. Dabei sei i_1 der Vektor, der in einem \mathcal{S}_{ij} gewählt wurde (Siehe voriger Absatz: In jedem I_k mit $k \leq s$ existiert genau ein solches i_k). Es gilt weiters: Die $\mathbf{e}_{I_1 \setminus i_1} - \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{I_1 \setminus i_1} - \mathbf{e}_{i_1} + (\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_j)$ sind überflüssige Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j}(\mathcal{S}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}))$. Falls \mathbf{e}_{i_1} ein minimaler Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ war, so besitzt $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j}(\mathcal{S}(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}))$ auf $(J \cup I_1) \setminus \bigcup_{j=2}^r I_j$ die richtige Anzahl von minimalen Erzeugern. Auf $\bigcup_{j=2}^r I_j \cap J$ können noch zuviele minimale Erzeuger vorhanden sein. Falls \mathbf{e}_{i_1} kein minimaler Erzeuger von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ ist, gibt es einen minimalen Erzeuger $\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_{i_k}$ mit $i_k \in I_k \setminus I_1$ (d.h., in I_{1k} wurde i_k gewählt). Wir können dann keinen der beiden Vektoren $\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_{i_k}$ und $\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_j$ eliminieren. Allerdings muss später für $I_k \cup J$ entweder der Erzeuger $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_k}$ oder $\mathbf{e}_{i_k} - \mathbf{e}_j$ zum Idealtan-

gentenkegel von $N(\mathcal{I}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}) \cdots (\mathcal{I}_k + \mathcal{I}))$ in der Ecke $\mathbf{a} + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{i_2} + \cdots + \mathbf{e}_{i_k}$ dazukommen, und wir haben dann keine Probleme mit der Simplicialität mehr!

Im nächsten Schritt für $P_2 := P_1 + N(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I})$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Es kommt bei der Ecke $\mathbf{a} + \mathbf{e}_j$ von P_1 entweder dasselbe $j \in J \setminus (I_2 \cup I_1)$ dazu (für ein $j' \neq j \in J$ keine Ecke!) oder ein $i_2 \in I_2 \setminus J$.

(1) Für $j \in J \setminus I_2$: In diesem Fall bleiben die $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$ als minimale Erzeuger erhalten (bzw. auf dem Schnitt $I_2 \cap J$ haben werden die $\mathbf{e}_{I_2 \cap J} - \mathbf{e}_j$ wegen $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_j$ durch die $\mathbf{e}_{I_2 \cap J} - \mathbf{e}_{i_2}$ gekillt. Das $i_2 \in I_2$ kommt von einem Faktor \mathcal{I}_{2k} mit $k \leq r$). Falls $i_1 \neq i_2$, also $i_2 \notin I_1 \cap I_2$, erhalten wir statt \mathbf{e}_{i_2} wieder $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_j$. Die Vektoren $\mathbf{e}_{I_1 \cap I_2} - \mathbf{e}_j$ können dank $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_j$ ebenso durch andere Erzeuger dargestellt werden. Unser einziges Problem ist hier wieder ein etwaiges $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_{i_k}$, das aber im Schritt $I_k \cup J$ auf jeden Fall entsorgt wird. Dann besitzt der Idealtangentenkegel von P_2 im Punkt $\mathbf{a} + 2\mathbf{e}_j$ für $(J \cup I_1 \cup I_2) \setminus \bigcup_{j=3} I_j$ die richtige Anzahl an minimalen Erzeugern.

(2) Im anderen Fall kommt $i_2 \in I_2$ dazu. Falls $i_2 = j \in I_2 \cap J$ ändert sich nichts an den minimalen Erzeugern von $IT_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_{i_2}}(\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{I}_1)(\mathcal{I} + \mathcal{I}_2))$. Sei also $i_2 \in I_2 \setminus (J \cup I_1)$. In $\bigcup_{j=2} I_j$ ändern sich die Erzeuger nicht, während hingegen in J zusätzlich zu den $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j$ alle Vektoren $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_2}$ dazukommen. Also haben wir auch den Erzeuger $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_2}$ dabei. D.h., wir können die Erzeuger $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_{i_2}$ ausdrücken durch die $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$. Der minimale Erzeuger \mathbf{e}_j geht über auf $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_2}$. Damit ist, wie in (1), auf der Menge $(J \cup I_1 \cup I_2) \setminus \bigcup_{j=3} I_j$ wieder die richtige Anzahl von minimalen Erzeugern vorhanden. Bei $P_3 := P_2 + N(\mathcal{I}_3 + \mathcal{I})$ haben wir insgesamt vier mögliche Eckenfolgen:

(a) Für den Idealtangentenkegel von $\mathbf{a} + 2\mathbf{e}_j$ in P_2 gilt wieder, falls $j \in J \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$, und falls dieses j in P_3 dazukommt: In I_3 bleiben bis auf den zusätzlichen Vektor $\mathbf{e}_{i_3} - \mathbf{e}_j$ alle minimalen Erzeuger gleich. Wenn $i_2 = i_3$ oder $i_3 = i_1$ also $i_2 \in I_2 \cap I_3$ bzw. $I_1 \cap I_3$, dann passt die Anzahl der minimalen Erzeuger auf der Menge $(J \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3) \setminus \bigcup_{j=4} I_j$. Wenn $i_2 \notin I_3$, d.h., $i_2 \in I_2 \setminus I_3$ dann ist auch kein Vektor zuviel in I_3 . Insgesamt ist in I_{23} nach Induktionsvoraussetzung alles klar. Der Fall $i_2 \neq i_3 \in I_2 \cap I_3$ kann nicht auftreten, da sonst der Idealtangentenkegel die *beiden* Vektoren $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_{i_3}$ und $\mathbf{e}_{i_3} - \mathbf{e}_{i_2}$ enthalten würde, was einen Widerspruch zur Eckenbedingung liefert. Analog für $i_1 = i_3$ in I_{13} .

(b) Wenn in $IT_{\mathbf{a}+2\mathbf{e}_j}(\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{I}_1)(\mathcal{I} + \mathcal{I}_2))$ jedoch $i_3 \in I_3$ dazukommt, sind die Vektoren $\mathbf{e}_{I_3 \setminus i_3} - \mathbf{e}_{i_3}$ schon von Vorneherein dabei, wir erhalten nur zusätzlich zu den $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$ und \mathbf{e}_j die Vektoren $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_3}$, die wir wegen $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_3}$ aber auch schon durch die ersten ausdrücken können. Der einzige minimale Erzeuger, der sich ändert ist $\mathbf{e}_j \rightsquigarrow \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_3}$. Es ist also wieder alles klar auf $(J \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3) \setminus \bigcup_{j=4} I_j$.

(c) Im anderen Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_{i_2}}(\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{I}_1)(\mathcal{I} + \mathcal{I}_2))$ kommt entweder wieder dasselbe $j \in J$ dazu, dann gilt (wegen der Kommutativität) dasselbe wie in Fall (b), oder

(d) in $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_{i_2}}(\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{I}_1)(\mathcal{I} + \mathcal{I}_2))$ kommt ein $i_3 \in I_3 \setminus (J \cup I_1 \cup I_2)$ dazu. Dann ist in I_3 alles wie gehabt (keine neuen Erzeuger!), während in J zusätzlich zu $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_j$ auch alle Vektoren $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_3}$ dazukommen. Dank $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_3}$ können wir auch diese eliminieren. Wir haben nur beide Vektoren $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_2}$ und $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_3}$ als Erzeuger. Allerdings ist auch das Ideal \mathcal{I}_{23} ein Faktor von \mathcal{I} , und dieses Ideal liefert für den Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_{i_2}+\mathbf{e}_{i_3}}(\mathcal{I}(\mathcal{I} + \mathcal{I}_1)(\mathcal{I} + \mathcal{I}_2)(\mathcal{I} + \mathcal{I}_3))$ einen der beiden Erzeuger $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_{i_3}$ oder $\mathbf{e}_{i_3} - \mathbf{e}_{i_2}$ (Wir können also einen der beiden Vektoren $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_2}$ oder $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_3}$ durch den anderen ausdrücken) Somit erhalten wir dasselbe Ergebnis wie in den Fällen (a)-(c).

Beim nächsten Ideal $(\mathcal{I}_4 + \mathcal{J})$ kann wieder entweder $j \in J \setminus I_4$ oder $i_4 \in I_4$ dazukommen, doch die Erzeuger verhalten sich exakt gleich wie in den obigen 4 Fällen! Somit haben wir in $\mathcal{I} \cdot (\mathcal{I}_1 + \mathcal{J}) \cdots (\mathcal{I}_s + \mathcal{J})$ alle Ecken abgedeckt, in denen mindestens ein $j \in J \setminus \bigcup_{j=1}^s I_j$ vorkommt. Es fehlt nur mehr die Folge der gewählten Vektoren $i_1 - i_2 - \dots - i_s$.

2. Fall. In P_1 kommt ein $i_1 \in I_1$ dazu. Dann erhalten wir für $IT_{\mathbf{a} + \mathbf{e}_{i_1}}(\mathcal{I}(\mathcal{J} + \mathcal{I}_1))$ lediglich die neuen Erzeuger $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_1}$, (auf I_1 und den restlichen I_k ändert sich nach I.V. nichts!) statt den zugehörigen Standardbasisvektoren. Daher ist der Idealtangentenkegel wieder simplizial. In P_2 kommen noch die Vektoren $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_2}$ dazu. Jedoch liefert dieselbe Überlegung wie in (d) wieder, dass entweder $\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_{i_2}$ oder $\mathbf{e}_{i_2} - \mathbf{e}_{i_1}$ schon im Idealtangentenkegel zu \mathbf{a} enthalten sind. Das bedeutet, dass wir auf der simplizialen Seite sind! Wenn nun $i_3 \in I_3$ dazukommt, können wir wieder gleich argumentieren, und haben damit auch alle Ecken der Gestalt $\mathbf{a} + \sum_k \mathbf{e}_{i_k}$ mit $i_k \in I_k$ für $k = 1, \dots, s$ erledigt. Falls $s = r$ sind wir fertig.

Sonst ist $s = r - 1$. Angenommen für die Ecke \mathbf{a} von P wurde in I_r in jedem I_{kr} jeweils ein $i_k \in I_k \setminus I_r$ gewählt. Dann sind schon in P jeweils die Vektoren $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ mit $i_k \in I_k \setminus I_r$ für jedes Ideal \mathcal{I}_{k_r} für alle $k = 1, \dots, r - 1$ (also $s = r - 1$) im Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{I})$ enthalten. Sei nun $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \sum_k \mathbf{e}_{i_k} \in P_s = P_1 + \dots + P_{s-1}$, die oben betrachtete Ecke. Wir müssen ein letztes Mal zwei Fälle unterscheiden:

(a) Es kommt ein \mathbf{e}_j mit $j \in J \setminus I_r$ in \mathbf{b} vor, d.h., alle Vektoren $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$, \mathbf{e}_j sind im Idealtangentenkegel zu \mathbf{b} von P_3 enthalten. Wenn wir das letzte Ideal $(\mathcal{I}_r + \mathcal{J})$ dazumultiplizieren, können wir dieses $j \in J \setminus I_r$ wählen und erhalten die neuen zusätzlichen Erzeuger $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_j$. In J bleibt alles beim Alten. Das gewählte j kommt nach Voraussetzung von einem Ideal $\mathcal{I}_k + \mathcal{J}$, oBdA sei $k = 1$. Wir haben also alle Vektoren $\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_j$ als Erzeuger von $IT_{\mathbf{b}}(\mathcal{I}(\mathcal{J} + \mathcal{I}_1) \cdots (\mathcal{J} + \mathcal{I}_s))$ in P_s . In $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_r$ muss ein $i_1 \in I_1 \setminus I_r$ gewählt worden sein (sonst keine Ecke!). Somit existieren auch alle Erzeuger $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_{i_1}$. Insbesondere sind wegen $\mathbf{e}_{i_1} - \mathbf{e}_j$ alle $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_j$ echt im Idealtangentenkegel enthalten. Damit bleibt der Kegel simplizial.

Wir hätten aber auch ein $i_r \in I_r \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{r-1})$ wählen können (muss existieren!). Dann ist entweder $j = i_r$, falls $j \in I_r \cap J$, also geschieht nichts Neues. Für den Fall $j \in J \setminus I_r$ kommen die neuen Erzeuger $\mathbf{e}_{I_r \setminus i_r} - \mathbf{e}_{i_r}$ bzw. $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_r}$ hinzu. Von den restlichen Mengen I_k , $k \neq r$ sind schon alle $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_k}$ für alle vorhandenen $\mathbf{e}_{i_k} \in \mathbf{b}$ Erzeuger des Idealtangentenkegels $IT_{\mathbf{b}}(\mathcal{I}(\mathcal{J} + \mathcal{I}_1) \cdots (\mathcal{J} + \mathcal{I}_s))$, ebenso wie alle $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ für alle $k \neq r$. Insbesondere sind alle Vektoren $\mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ mit $\mathbf{e}_{i_k} \in \mathbf{b}$ und $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_r}$ im zugehörigen Idealtangentenkegel enthalten. Durch diese können wir nun alle $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ bzw. $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_k}$ ersetzen durch $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_{i_r}$ bzw. $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_r}$ und \mathbf{e}_j durch $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_r}$. Falls in J noch ein $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_l}$ existieren sollte, so erhalten wir von I_l den Erzeuger $\mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{i_l}$, also ist hier alles klar. Auch in allen Durchschnitten $I_r \cap I_k$, $r \neq k$ können wir wegen den im Idealtangentenkegel enthaltenen Vektoren $\mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ alle $\mathbf{e}_{I_r \cap I_k} - \mathbf{e}_{i_k}$ durch die anderen ausdrücken. Wir haben also keine überflüssigen Erzeuger erhalten und somit ist auch hier der Idealtangentenkegel simplizial.

(b) Ähnlich geht es, wenn $\mathbf{e}_j \notin \mathbf{b}$ (vgl. (b) oben): wenn wir dann ein $j \in J$ für $I_r \cup J$ wählen, erhalten wir zunächst die zusätzlichen Erzeuger $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_j$ und $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$. Weiters existieren schon alle $\mathbf{e}_{I_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ bzw. $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_k}$ für sämtliche $\mathbf{e}_{i_k} \in \mathbf{b}$, insbesondere alle $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{i_k}$. Wie oben können wir analog alle $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_k}$ durch die $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$ Vektoren ausdrücken und in I_r ebenso. Daher ist der Idealtangentenkegel simplizial.

Wenn wir jedoch $i_r \in I_r \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{r-1} \cup J)$ für $I_r \cup J$ wählen, dann erhalten wir wie vorher als neue Erzeuger des simplizialen Idealtangentenkegels in der Ecke $\mathbf{b} + \mathbf{e}_{i_r}$ von

$P + \sum_{i=1}^{s+1} P_i$ die $\mathbf{e}_{I_r \setminus i_r} - \mathbf{e}_{i_r}$ (Somit kann man wegen $\mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ alle minimalen Erzeuger der Form $\mathbf{e}_{I_i} - \mathbf{e}_{i_k}$ eliminieren). Auch in J ist wegen der Existenz der Erzeuger $\mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{i_k}$ für alle $k \neq r$ alles klar. Denn $\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_k} = (\mathbf{e}_J - \mathbf{e}_{i_r}) + (\mathbf{e}_{i_r} - \mathbf{e}_{i_k})$. \square

Lemma 10. Sei \mathcal{I} wie in Lemma 9 und sei $\mathcal{J} := \prod_{i=1}^k \mathcal{I}_i$. Dann ist auch $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ zahm.

Beweis. Wir nehmen einfach das Ideal $\mathcal{I}_{k+1} := (0)$ zu den \mathcal{I}_i hinzu. Dann ist $I_{k+1} = \emptyset$ und für alle \mathcal{I}_i mit $i < k+1$ gilt $I_i \cup I_{k+1} = I_i$. Dies impliziert $\mathcal{I}_i + \mathcal{I}_{k+1} = \mathcal{I}_i$. Nach obigem Lemma ist das Produkt $\prod_{i < j}^{k+1} \mathcal{I}_{ij}$ zahm. Und da $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J} = \prod_{i,j}^{k+1} \mathcal{I}_{ij}$ gilt, haben wir die Behauptung gezeigt. \square

Lemma 11. Sei \mathcal{G} eine bauchige Menge, dann gilt: Für je zwei Ideale $\mathcal{G}_i = (x_k : k \in G_i), \mathcal{G}_j = (x_k : k \in G_j) \in \mathcal{G}$ mit $G_i \cap G_j \neq \emptyset$, ist $\mathcal{G}_i + \mathcal{G}_j \in \mathcal{G}$.

Beweis. Folgt aus Satz 15 (3) (b). \square

Satz 16. Sei $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_i\}$ eine bauchige Menge von Idealen in $K[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist die Explosion von \mathbb{A}^n mit Zentrum $\prod_{\mathcal{G}_i \in \mathcal{G}} \mathcal{G}_i$ glatt.

Beweis. Wir werden dies mit Hilfe von Lemma 9 beweisen, indem wir zuerst das Produkt aller möglichen paarweisen Vereinigungen (= das Arrangement $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$) betrachten. Dann werden wir zeigen, dass man beliebige disjunkte Vereinigungen, die ja nicht notwendig in der bauchigen Menge enthalten sind, weglassen kann. D.h., man kann jeden Faktor $\mathcal{G}_i + \mathcal{G}_j$, wobei $G_i \cap G_j = \emptyset$ ist, weglassen. Man muss also zeigen, dass die Idealtangentenkegel in den Ecken des Newtonpolyeders von $\prod_{\mathcal{G}_i \in \mathcal{G}} \mathcal{G}_i$ immer noch simplizial sind, wenn man die Erzeuger, die von beliebigen disjunkten Vereinigungen stammen, in einem Idealtangentenkegel von $N(\prod_{\mathcal{G}_i \in \mathcal{C}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}_i)$ weglässt. Die so erhaltenen Idealtangentenkegel haben dann die selben minimalen Erzeuger wie Idealtangentenkegel in Ecken von $N(\prod_{\mathcal{G}_i \in \mathcal{G}} \mathcal{G}_i)$.

Wir können wieder alle Ideale $\mathcal{G}_i = (x_j : j \in G_i)$ der bauchigen Menge mit ihren Wolken G_i identifizieren. Nach obigem Lemma sind alle Vereinigungen von nicht-disjunkten $G_i \cup G_j$, abgekürzt G_{ij} , wieder in \mathcal{G} enthalten. Wenn ein G_i in einem G_j enthalten ist, so ist die Vereinigung G_j also trivialerweise in \mathcal{G} enthalten. Wir definieren zuerst die Ideale $\mathcal{I}_i := \mathcal{G}_i$. Es bezeichne wieder I_i für alle i die Wolke von \mathcal{I}_i . Dann ist $\prod_{i < j} \mathcal{I}_{ij} \cdot \prod_i \mathcal{I}_i$ nach Lemma 9 glatt. Das bedeutet, dass wir alle paarweisen Vereinigungen $G_i \cup G_j$ abgedeckt haben. In der bauchigen Menge \mathcal{G} können aber auch Vereinigungen von mehreren Elementen auftauchen (Im Ebenenbeispiel im \mathbb{A}^4 mit $G_1 = \{1, 2\}, G_2 = \{1, 3\}, G_3 = \{1, 4\}$ muss auch der Faktor $G_1 \cup \dots \cup G_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ in der bauchigen Menge enthalten sein). Wir setzen also $\mathcal{I}_{|\mathcal{G}|+1} := \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2, \mathcal{I}_{|\mathcal{G}|+2} := \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_3$ etc. Mit dieser Methode erhalten wir alle drei- und vierfachen Vereinigungen der zugehörigen Wolken. Iteration liefert schließlich alle möglichen Vereinigungen von Wolken $\bigcup_i G_i$, also das ganze Arrangement $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$. Da das Arrangement nur aus endlich vielen Unterräumen besteht, ist auch die Anzahl der \mathcal{I}_i endlich. Die Explosion im Ideal $\prod_{i < j} \mathcal{I}_{ij} \cdot \prod_i \mathcal{I}_i$ ist nach Lemma 10 glatt. Dieses Produkt hat nur zwei Schönheitsfehler:

(1) Es kommen Ideale mehrfach vor. Zum Beispiel ist der Faktor $\mathcal{I}_{12} = \mathcal{I}_{|\mathcal{G}|+1}$ mindestens doppelt vorhanden.

(2) Es tauchen auch Summen von Idealen mit disjunkten Wolken auf. Es gibt also Faktoren $\mathcal{I}_i + \mathcal{I}_j$, für die $I_{ij} = I_i \cup I_j$ gilt. Die zugehörigen Ideale sind allerdings nicht notwendig in der bauchigen Menge enthalten!

Im Fall (1) haben wir Dank Korollar zu Lemma 8 kein Problem, da ein Faktor \mathcal{S}_i^k die Erzeuger eines Idealtangentenkegels von $N(\mathcal{S}_i^{k-1} \mathcal{S})$ nicht verändert. Man braucht sich also nicht um den Faktor \mathcal{S}_i^{k-1} kümmern.

Im Fall (2) müssen wir schauen, was mit den Erzeugern eines beliebigen Idealtangentenkegels passiert, wenn wir eine disjunkte Vereinigung $I_i \dot{\cup} I_j$ weglassen. Es bezeichne $\mathcal{S} := \prod_{i < j} \mathcal{S}_{ij} \cdot \prod_i \mathcal{S}_i$. Sei $\mathbf{a} := \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k$ eine Ecke im Newtonpolyeder $N(\prod_{i < j} \mathcal{S}_{ij})$ und seien $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$ zwei Ideale mit disjunkten Wolken I, J . Vom Ideal \mathcal{S}_{ij} erhalten wir in $N(\mathcal{S}_{ij})$ die Erzeuger

$$\{\mathbf{e}_{I \setminus i} - \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_J - \mathbf{e}_i\}.$$

Also sind diese Erzeuger auch im Idealtangentenkegel $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ enthalten. (Wir können o.B.d.A. $i \in I$ wählen, für $j \in J$ funktioniert alles analog!).

Was passiert, wenn wir den Faktor \mathcal{S}_{ij} aus dem Produkt \mathcal{S} weglassen? Da in $\mathcal{S} \mathcal{S}_{ij} = \prod_{k < l, (k,l) \neq (i,j)} \mathcal{S}_{kl} \cdot \prod_k \mathcal{S}_k$ beide Faktoren \mathcal{S}_i und \mathcal{S}_j auftauchen, enthält der Idealtangentenkegel einer Ecke $\mathbf{a} - \mathbf{e}_i$ von $N(\mathcal{S} / \mathcal{S}_{ij})$ alle Vektoren der Form $\mathbf{e}_{I \setminus i} - \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_j$. Unser einziges Problem sind die $\mathbf{e}_{J \setminus j} - \mathbf{e}_i$. Wenn wir also die \mathcal{S}_{ij} -Vektoren weglassen, ist der einzige wirklich fehlende Erzeuger von $IT_{\mathbf{a} - \mathbf{e}_i}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{ij})$ der Vektor $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$. Doch diesen benötigen wir für die Simplizialität überhaupt nicht. Denn:

Probleme mit der Simplizialität kann es höchstens auf einer Menge $K = I_k$, für ein \mathcal{S}_k , geben, für die Erzeugervektoren $\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_j$ im Idealtangentenkegel existieren. Da diese Menge K auch einen Faktor \mathcal{S}_k im Produkt der Ideale liefert, sind Erzeuger der Form $\mathbf{e}_{K \setminus k} - \mathbf{e}_k$ in $IT_{\mathbf{a} - \mathbf{e}_i}(\mathcal{S} / \mathcal{S}_{ij})$ für ein $k \in K$. Die Vektoren $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j$ sind ebenso Erzeuger dieses Idealtangentenkegels. Daher sind die einzigen zwei Vektoren, die die Simplizialität zerstören könnten

$$\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i \text{ und } \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j.$$

Wenn beide Vektoren redundante Erzeuger des Idealtangentenkegels von \mathbf{a} in $N(\mathcal{S})$ sind, haben wir kein Problem. Sonst sei o.B.d.A. $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ der minimale Erzeuger in "Richtung" i von $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$. Dann ist auch der Vektor $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ in $IT_{\mathbf{a}}(\mathcal{S})$ enthalten. Die Frage ist nun, ob dieser Erzeuger nicht auch schon in $IT_{\mathbf{a} - \mathbf{e}_i}(\mathcal{S} / \mathcal{S}_{ij})$ enthalten ist.

1. Fall. Es existiert eine Menge K wie oben, sodass $I \cap K \neq \emptyset$ und $J \cap K \neq \emptyset$. Dann *müssen* die drei Ideale $\mathcal{S}_{ik}, \mathcal{S}_{jk}$ und \mathcal{S}_{ijk} in der bauchigen Menge enthalten sein (nach Lemma 11). Da die Vektoren $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ bzw. $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_j$ Erzeuger des Idealtangentenkegels der Ecke $\mathbf{a} - \mathbf{e}_i$ in $N(\mathcal{S} / \mathcal{S}_{ij})$ sind, müssen in I_{ik} bzw. I_{jk} jeweils $i \in I \setminus K$ bzw. $j \in J \setminus K$ gewählt worden sein. (Denn: Wäre z.B. in I_{ij} ein $i' \in I \setminus i$ gewählt worden, enthielte der Idealtangentenkegel auch den Vektor $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_{i'}$. Dann wäre aber $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{i'} + (\mathbf{e}_{i'} - \mathbf{e}_i)$ kein minimaler Erzeuger mehr. Widerspruch!) Da aber auch die Menge I_{ijk} vorkommt, muss hier auch entweder dasselbe i oder j gewählt worden sein. Für j erhalten wir den zusätzlichen Erzeuger $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ und für i den Erzeuger $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$. (Wenn in I_{ijk} ein $k \in K$ $k \neq i, j$ gewählt worden wäre, erhielten wir den Erzeuger $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k$. Widerspruch zur Eckenbedingung!) Wir können also auf jeden Fall einen der beiden störenden Erzeuger eliminieren.

2. Fall. I ist disjunkt zu allen K der obigen Form. Damit wir trotzdem den Vektor $\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i$ als minimalen Erzeuger des Idealtangentenkegels $IT_{\mathbf{a} - \mathbf{e}_i}(\mathcal{S} / \mathcal{S}_{ij})$ erhalten, muss eine Menge $I \cup L$ mit $k \in L \cap K$ in \mathcal{G} enthalten sein. Da $(I \cup L) \cap K \neq \emptyset$ so müssen auch (wegen Lemma 11) die Faktoren $(I \cup L \cup K) \cup J$ und $J \cup (K \cup L)$ in \mathcal{G}

sein. Damit sind wir wieder in der Situation vom 1. Fall.

Wenn noch zusätzlich $K \cap J = \emptyset$ ist, muss entweder $e_k - e_j$ von anderen Erzeugern gekillt werden oder auch ein Faktor $J \cup M$ mit $k \in M \cap K$ in \mathcal{G} sein (sonst erhalten wir keinen Erzeuger $e_k - e_j$!). Analog zu vorher muss dann auch $(I \cup K \cup M) \cup J$ im Produkt enthalten sein, womit wir wieder im 1. Fall wären.

□

Beispiel 22. Wir wissen nun, dass ein Produkt von Koordinatenidealen zahm ist, wenn diese Ideale eine bauchige Menge bilden. Diese Bedingung ist jedoch nicht notwendig: Seien $\mathcal{S}_1 = (x, y)$, $\mathcal{S}_2 = (x, z)$, $\mathcal{S}_3 = (y, z)$ die reduzierten Ideale der drei Koordinatenachsen in \mathbb{A}^3 . Die Menge $\mathcal{G} = \{\mathcal{S}_i\}$ ist keine bauchige Menge, da (x, y, z) nicht in \mathcal{G} enthalten ist (keine direkte Summe!). Die Explosion von \mathbb{A}^3 mit Zentrum $\mathcal{S}_1 \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_3$ ist aber trotzdem glatt.

Wir können dieses Beispiel auf $(n - 2)$ -dimensionale Koordinatenunterräume in \mathbb{A}^n verallgemeinern: Es seien $\mathcal{S}_{ij} = (x_i, x_j : i, j \in \{1, \dots, n\})$ Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist $\prod_{i < j} \mathcal{S}_{ij}$ zahm. Denn: Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne $\mathcal{S}_i = (x_i)$ das von x_i erzeugte Hauptideal. Nach Lemma 9 ist $\prod_{i < j} (\mathcal{S}_i + \mathcal{S}_j) = \prod_{i < j} \mathcal{S}_{ij}$ zahm. Man sieht auch sofort, dass die \mathcal{S}_{ij} keine bauchige Menge bilden.

3.6 Weitere Fragen

Im Laufe dieser Arbeit sind uns immer wieder Probleme begegnet, die wir nur teilweise oder gar nicht lösen konnten. Zum Abschluss gebe ich noch einen kurzen Überblick über Fragen, die uns noch weiter beschäftigen könnten:

Verallgemeinerung von bauchigen Mengen. Am Schluss haben wir gesehen, dass das Konzept einer *bauchigen Menge* viel zu restriktiv ist. Wir können in jeder beliebigen Dimension Koordinatenideale, die keine bauchige Menge bilden, finden, sodass ihr Produkt zahm ist. Kann man nun auch eine notwendige Bedingung für die Zahmheit finden? Genauer: Gegeben sei eine endliche Menge $\{\mathcal{S}_i\}$ von Koordinatenidealen. Welche Bedingung (*) müssen die Wolken der \mathcal{S}_i erfüllen, sodass gilt: $\prod_i \mathcal{S}_i$ ist zahm $\iff (*)$ gilt?

In Lemma 9 haben wir gezeigt, dass das Produkt aller paarweisen Summen $\mathcal{S}_i + \mathcal{S}_j$ von endlich vielen Koordinatenidealen \mathcal{S}_i zahm ist. Gilt dasselbe für die symmetrische Differenz? Genauer: Es seien $\mathcal{S}_i = (x_k, k \in I_i)$, $\mathcal{S}_j = (x_k, k \in I_j)$. Definiere $\mathcal{S}_i \Delta \mathcal{S}_j = (x_k, k \in I_i \Delta I_j)$. Ist das Produkt $\prod_{i < j} \mathcal{S}_i \Delta \mathcal{S}_j$ zahm? Meine Vermutung hierzu:

Vermutung. Sei $\{\mathcal{S}_i\}$ eine endliche Menge von Koordinatenidealen. Wir ordnen je zwei Idealen $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j$ mit $i \neq j$ ein Ideal $\mathcal{S}_{ij} = (x_k, k \in I_{ij})$ zu. Dann ist das Produktideal $\prod_{i < j} \mathcal{S}_{ij}$ genau dann zahm, wenn für alle $i \neq j$ gilt: $I_i \Delta I_j \subseteq I_{ij}$.

Wir haben schon (mit Hilfe von Maple) bestimmt, wann das Produkt von zwei bzw. drei Koordinatenidealen zahm ist. Kann man weiters eine einfache Bedingung an die Wolken stellen, sodass das Produkt von genau s Koordinatenidealen zahm ist?

Schließlich noch: Wie kann man bauchige Mengen auf beliebige Monomideale verallgemeinern? Was kann man über ein Produkt von Monomidealen allgemein aussagen?

Zur Beweismethode. Unsere Beweise der Zahmheit eines monomialen Ideals sind alle nach demselben Schema abgelaufen: Wir haben zuerst die Ecken des assoziierten Newtonpolyeders in \mathbb{R}^n bestimmt und dann die jeweiligen Idealtangentenkegel berechnet. *Kann man die Beweise vereinfachen, indem man die Polyeder dualisiert?* Genauer: Betrachte den inneren Normalenfächer des Newtonpolyeders, auch genannt der duale Fächer. Die n -dimensionalen Unterkegel des dualen Fächers entsprechen den Tangentialkegeln des Polyeders. Diesen Fächer kann man am besten durch Schnitt mit einer affinen Hyperebene $\sum_i x_i = 1$ visualisieren. Das entspricht einer Projektivisierung des Fächers. Dadurch erhält man ein $(n - 1)$ -Simplex, das durch Polytope (entsprechen den Tangentialkegeln) unterteilt wird. Dieses Simplex wird *Kaleidoskop* genannt. Es gilt: ein Newtonpolyeder ist simplizial genau dann, wenn sein Kaleidoskop simplizial ist. Im Fall von Koordinatenidealen reicht dies auch schon für die Glattheit. Durch das Dualisieren und Projektivisieren sparen wir eine Dimension. Das Problem ist jedoch hier, die Schnittpunkte der Unterpolytope des Kaleidoskops zu bestimmen, sodass man Aussagen über die Simplizialität treffen kann.

Zähmung von Idealen. Im Abschnitt über das Rosenbergideal haben wir gesehen, wie man ein Newtonpolyeder zähmen kann: Sei \mathcal{I} ein beliebiges monomiales Ideal. Durch Multiplikation bzw. Durchschnittsbildung von \mathcal{I} mit einem weiteren monomialen Ideal kann man das zugehörige Newtonpolyeder $N(\mathcal{I})$ zähmen. Aus der speziellen Struktur von \mathcal{R} ergab sich als Zähmungsideal eine Potenz des maximalen Ideals. *Kann man für ein beliebiges \mathcal{I} ein (kanonisches) Zähmungsideal finden?*

Äquivariante Auflösung. Unser Hauptziel im zweiten Kapitel war es, ein geeignetes nichtreduziertes Zentrum einer Explosion des \mathbb{A}^n zu finden, sodass wir zu einer äquivariante n eingebetteten Auflösung einer affinen torischen Hyperfläche X in \mathbb{A}^n kommen. Wir haben nun zwar einige Kandidaten für symmetrieminvariante Zentren bestimmt, sodass $\tilde{\mathbb{A}}^n$ glatt ist, jedoch wird i. A. X durch keine dieser Explosionen mit einem Schlag aufgelöst. Unsere Invarianten werden sogar lexikographisch größer. *Kann man ein nichtreduziertes monomiales Zentrum \mathcal{I} finden, sodass X durch eine Explosion von \mathbb{A}^n in \mathcal{I} aufgelöst wird? Kann man eine geeignete Invariante von X finden, sodass diese bei einer Explosion von \mathbb{A}^n in einem symmetrieminvarianten Zentrum (z.B.: Produkt von Idealen einer bauchigen Menge) lexikographisch kleiner wird? Verallgemeinerung auf torische Varietäten niedriger Dimension?*

Literaturverzeichnis

- [BM] E. Bierstone and P. Milman, *Desingularization of toric and binomial Varieties*, J. Algebraic Geom. **15** (2006), 443–486.
- [Br] J.-L. Brylinski, *Eventails et variétés toriques*, Séminaire Sur Les Singularités Des Surfaces (M. Demazure, H. Pinkham, and B. Teissier, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 777, 1980, pp. 247–288.
- [CLO] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, 3rd ed., Springer, New York, 2007.
- [DP] C. De Concini and C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Mathematica **1** (1995), 459–494.
- [Ei] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer, New York, 1995.
- [EH] D. Eisenbud and J. Harris, *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 197, Springer, New York, 2000.
- [Ew] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 168, Springer, New York, 1996.
- [Fe] E.- M. Feichtner, *De Concini-Procesi wonderful arrangement models - A discrete geometer’s point of view*, Combinatorial and Computational Geometry (J. E. Goodman, J. Pach, and E. Welzl, eds.), MSRI Publications, vol. 52, Cambridge University Press, 2005, pp. 330-360.
- [FM] W. Fulton and R. MacPherson, *A compactification of configuration spaces*, Ann. Math. **139** (1994), 183–225.
- [Fu] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [GKZ] I. Gel’fand, M. Kapranov, and A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multi-Dimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [Ha1] H. Hauser, *Seventeen Obstacles for Resolution of Singularities*, The Brieskorn Anniversary Volume 1996, Progress in Math., vol. 162, Birkhäuser, 1997.
- [Ha2] ———, *Excellent Surfaces and Their Taut Resolution*, Resolution of Singularities (H. Hauser, J. Lipman, F. Oort, and A. Quiros, eds.), Progress in Math., vol. 181, Birkhäuser, 2000.
- [Ha3] ———, *Seven Short Stories on Blowups*, Proceedings of 12th Gökova Geometry-Topology Conference 2005 (S. Akbulut, ed.), International Press, 2006, pp. 1–48.
- [Hi] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), 109–326.
- [Hs] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, New York, 1977.
- [Hu] Y. Hu, *A compactification of open varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4737–4753.
- [KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 339, Springer, Berlin, 1973.
- [Li] L. Li, *Wonderful compactifications of arrangements of subvarieties*, arXiv:math.AG/0611412v1.
- [MP] R. MacPherson and C. Procesi, *Making conical compactifications wonderful*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), 125–139.
- [Mu] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, second expanded edition, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1358, Springer, Berlin, 1999.

- [Od1] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry: An Introduction to Toric Varieties*, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, 1988.
- [Od2] ———, *Lectures on Torus Embeddings and Applications*, TATA, 1978.
- [Ro] J. Rosenberg, *Blowing up nonreduced subschemes of \mathbb{A}^n* (preprint, 1998).
- [Sc] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester, 1986.
- [St] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [Ul] A. Ulyanov, *Polydiagonal compactifications of configuration spaces*, *J. Algebraic Geom.* **11** (2002), 129–159.
- [Vi] O. Villamayor, *Patching local uniformizations*, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* **25** (1992), 629–677.