Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 13 (bis 25.6.2020, 10:00)

Aufgabe 63. Geben Sie eine orthogonale Matrix an, die

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

Aufgabe 64. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 65. Wir betrachten den Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der rellen 2×2 Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto MA$ linear ist.

(c) Es sei C die Matrix von T bezüglich der Basis B. Berechnen Sie $\det(C)$.

(d) Ist jede normale Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch ?

Aufgabe 66. Sei A eine orthogonale 3×3 Matrix. Zeigen Sie für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$:

$$(Ax) \times (Ay) = \det(A) \cdot A(x \times y).$$

Aufgabe 67. Berechnen Sie, für $n \geq 2$, die Determinante d_n der $n \times n$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

wie folgt: Zeigen Sie, für $n \geq 4$, $d_n = 2 \cdot d_{n-1} - d_{n-2}$ und erraten und beweisen Sie mit vollständiger Induktion die (sehr einfache) Formel für d_n.