Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 11 (bis 11.6.2020, 10:00)

Aufgabe 53. Wir versehen $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v$$

worin u, v die Spaltenvektoren der Koordinaten zweier Elemente von V bezüglich einer Basis von V sind. Bestimmen Sie (mit Hilfe einer Matrixdarstellung von T) die Adjungierte der linearen Abbildung $T : V \to V,\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 5y \\ 7x + y \end{pmatrix}$.

Aufgabe 54. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ein linearer Operator $T : V \to V$ heisst *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$ und er heisst *normal*, falls $T \circ T^* = T^* \circ T$. Zeigen Sie:

a) Für selbstadjungierte Operatoren S, T ist $S \circ T$ genau dann selbstadjungiert, wenn $S \circ T = T \circ S$.

b) T ist genau dann normal, wenn für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle.$$

Aufgabe 55. Sei C eine symmetrische und positiv definite Matrix und $K = A^T CA$. Unter welcher Bedingung an die $m \times n$ - Matrix A $(m \geq n)$ kann die Funktion

$$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{2}\langle x, Kx\rangle - \langle f, x\rangle$$

ihr Minimum an mehreren Stellen annehmen? Konstruieren Sie ein nicht-triviales Beispiel.

Aufgabe 56. Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & -2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Unter welcher Bedingung an a, b, d hat A vier linear unabhängige Eigenvektoren?

Aufgabe 57. Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und A, B lineare Operatoren in V. Beweisen Sie: λ ist genau dann ein Eigenwert von $A \circ B$, wenn λ ein Eigenwert von $B \circ A$ ist.