Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 10 (bis 28.5.2020, 10:00)

Aufgabe 48. Es seien V ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie für x, $y \in V$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle.$$

Aufgabe 49. Wie in den Anregungen zur Federkette der Vorlesung ("andere Randbedingungen"): n Massen $m_1, \ldots, m_n$ sind als lineare Kette mit Federn (Federkonstanten $c_1, \ldots, c_n$) verbunden und hängen senkrecht im Gravitationsfeld (Beschleunigung g.) Formulieren Sie das lineare Gleichungssystem, dessen Lösung die Gleichgewichtslage dieser Struktur beschreibt.

Aufgabe 50. Wie in den Anregungen zur Federkette der Vorlesung ("zusätzliche Federn spannen"): zwei Massen m_1, m_2 hängen senkrecht im Gravitationsfeld (Beschleunigung g). m_1 ist mit der oberen unbeweglichen Aufhängung durch Feder c_1 verbunden und mit m_2 durch c_2. Ferner ist m_2 mit der unteren unbeweglichen Aufhängung durch Feder c_4 verbunden und zusätzlich mit der oberen Aufhängung durch Feder c_3. Formulieren Sie das lineare Gleichungssystem, dessen Lösung die Gleichgewichtslage dieser Struktur beschreibt. Wählen Sie Werte für $g, m_1, m_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ so, dass Sie das Gleichungsystem leicht auf Papier lösen können.

Aufgabe 51. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst negativ definit, falls $x^T A x < 0$ für alle $x \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

- A negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit.
- A negativ definit $\Rightarrow$ A^2 positiv definit.
- A^2 positiv definit $\Rightarrow$ A positiv definit oder A negativ definit.

Aufgabe 52. Zeigen Sie, dass $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{2}\langle x, Kx \rangle - \langle f, x \rangle$ für $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ genau ein Minimum besitzt und berechnen Sie dieses für $f = (-8, 4, -16)^T$.