Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 9 (bis 14.5.2020, 10:00)

Aufgabe 43. Finden Sie die orthogonale Projektion von $y \in V$ auf den Unterraum U des Vektorraums V mit einem Skalarprodukt, wobei

a) $V = \mathbb{R}^3$, $y = (2,1,3)^T$, $U = \{(x,y,z)^T : x + 3y - 2z = 0\}$,

b) $V = C([0,1])$ mit $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $y(x) = 4 + 3x - 2x^2$, $U = \mathbb{P}_1$.

Aufgabe 44. Seien V, W zwei endlichdimensionale Vektoräume mit Skalarprodukten und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass

a) $\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$,
b) $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$,
c) $\ker(AA^*) = \ker(A^*)$, und
d) $\operatorname{im}(A^*A) = \operatorname{im}(A^*)$.

Aufgabe 45. a) Formulieren Sie die Aussage $(ST)^* = T^*S^*$ mit Vektorräumen U, V, W und beweisen Sie diese.

b) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x_1, x_2)^T = (3x_2, -x_1, 4x_1)^T$. Bestimmen Sie T^* bezüglich der Standard-Skalarprodukte ohne Matrizen analog zum Beispiel in der Vorlesung.

Aufgabe 46. Sei $T : V \to W$ ein linearer Operator zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V, W mit Skalarprodukten (die beide der Einfachheit halber mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet werden) und U ein Untervektorraum von W. Zeigen Sie:

$$T^*(U^\perp) = (T^{-1}(U))^\perp.$$

Aufgabe 47. Für V und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wie in Aufgabe 43b) bestimmen Sie den adjungierten Operator von $T : V \to V$,

$$Tf(x) = \int_0^1 e^{x-y} f(y)\, dy\,, \quad x \in [0,1].$$