Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 8 (bis 7.5.2020, 10:00)

Aufgabe 38. Seien U und W zwei Unterräume eines endlichdimensionalen Vektorraums mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass

$$(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \quad \text{und}$$
$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp.$$

Aufgabe 39. Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt auf $V = \mathcal{C}([0,1])$:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx. \tag{1}$$

Sei $U = \{p \in \mathbb{P}_3, p(0) = p'(0) = 0\}$ der Unterraum von V. Bestimmen Sie eine Basis von U. Finden Sie das Polynom $p \in U$, das von dem Polynom $q(x) = 2 + 3x$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 40. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $P : V \to V$ eine linear Abbildung, sodass $P^2 = P$. Zeigen Sie:

a) wenn $u \perp v$ für alle $u \in \operatorname{im}(P)$ und alle $v \in \ker(P)$, dann existiert ein Unterraum U von V, sodass $P = P_U$.

b) wenn $\|Pu\| \leq \|u\|$ für alle $u \in V$, dann existiert ein Unterraum U von V, sodass $P = P_U$.

Hinweis: Man kann b) aus a) und Bsp. 20c) erhalten.

Aufgabe 41. Betrachten Sie das Skalarprodukt (1) auf $\mathbb{P}_2$ und das Funktional $\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$, das durch $\varphi(p) = p(0) + p'(1)$ definiert ist. Finden Sie $q \in \mathbb{P}_2$, sodass $\varphi(p) = \langle q, p\rangle$ für alle $p \in \mathbb{P}_2$.

Aufgabe 42. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie T^*f, wobei

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $V = \mathbb{P}_2$ mit (1), $Tg = g' + 3g$ und $f(x) = 4 - x + 3x^2$.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie T^* selbst nicht finden sollen. Tatsächlich ist dies in b) ziemlich schwierig. Auf der anderen Seite kann die Übung nur mit dem Stoff aus der Vorlesung gelöst werden. Die Integralrechnung in b) ist etwas langwierig, aber bitte berechnen Sie auch alle Integrale.