Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 7 (bis 30.4.2020, 10:00)

Aufgabe 33. Sei V ein Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt und sei U ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Beweisen Sie, dass $U = (U^\perp)^\perp$.

Aufgabe 34. a) Seien $u_1 = (2, -1, 1, 0)^T$ und $u_2 = (1, -1, 3, -1)^T$. Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Unterraums $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2\}) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarproduktes. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

b) Finden Sie die explizite Form der orthogonalen Projektion $P_U : \mathbb{R}^4 \to U$.

Aufgabe 35. Betrachten Sie die folgende Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist (d.h., P ist linear und $P \circ P = P$) und $\mathbb{R}^2 = \mathrm{im}(P) \oplus \ker(P)$ (Direkte Summe). Ist P orthogonal?

Aufgabe 36. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, sodass $f \circ f = f$ gilt und sei $g = id_V - f$. Zeigen Sie:

a) $g \circ g = g$,
b) $g \circ f = f \circ g = 0$ (Nullabbildung),
c) $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ und $\ker(f) = \mathrm{im}(g)$.

Aufgabe 37. Seien $U = \mathcal{L}(\{(1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 2)^T\}) \subset \mathbb{R}^4$ und $v = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$. Finden Sie $u \in U$, sodass $\|v - u\| \leq \|v - z\|$ für alle $z \in U$.