Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 5 (bis 2.4.2020, 10:00)

Aufgabe 23. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein Unterraum gegeben durch die Ebene $x - y + z = 0$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 24. Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ ein orthonormales m-Tupel in einem Vektorraum V, $\dim V = n$. Sei $v \in V$. Zeigen Sie, dass

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle e_i, v\rangle|^2$$

genau dann, wenn $v \in span(e_1, \ldots, e_m)$.

Aufgabe 25. Im $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ sei das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

definiert.

a) Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ berechnen Sie $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$ und $d(f, g) = \|f - g\|$, und bestimmen Sie $h \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$, $h \neq 0$, die orthogonal zu f ist.

b) Seien $\mathbb{P}_2 \subset \mathcal{C}([0, 2\pi])$ (=Menge aller Polynome vom Grad ≤ 2) und $\mathcal{B} = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$. Mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von der Basis $\mathcal{B}$ aufgespannten Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Aufgabe 26. Sei $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3 = span(e_1, e_2, e_3)$ (die kanonische Basis) hinsichtlich $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ zu ermitteln.

Freiwillig: Zeigen Sie, dass $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ in $\mathbb{R}^3$ tatsächlich das Skalarprodukt ist.

Aufgabe 27. Sei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ hinsichtlich eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und berechnen Sie $\left\langle (1, 4)^T, (2, 0)^T \right\rangle$.

Tipp. Schauen Sie sich noch einmal die Übungen 18b und 26 an.