Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 3 (bis 19.3.2020, 10:00)

Aufgabe 13. a) Sei g die Gerade im $\mathbb{R}^2$, welche auf zueinander senkrechten Koordinatenachsen die Abschnitte $a \neq 0$ und $b \neq 0$ hat (a und/oder b könnten auch negativ sein). Zeigen Sie: $g = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1\right\}$.

b) Bestimmen Sie eine Gerade des $\mathbb{R}^2$, die durch $(6, 8)$ verläuft und mit den Koordinatenachsen ein Dreieck mit der Fläche 12 bildet.

Aufgabe 14. Zeigen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts im $\mathbb{R}^3$: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das durch die Diagonalen eines gegebenen Parallelogramms aufgespannt wird, ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Parallelogramms.

Aufgabe 15. Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$. Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

a) eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{C}^2$,
b) eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen in $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 16. Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden:

i) $n = 2, v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$.
ii) $n = 3, v_1 = (4, 6, 8), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (2, 4, 6), v_4 = (2, 3, 4)$.
iii) $n = 3, v_1 = (1, -2, 13), v_2 = (0, 2, -3), v_3 = (0, 0, -5)$.

Aufgabe 17. Gegeben ist der Vektor x in Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3, e_4) und Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie fest, dass (b_1, b_2, b_3, b_4) eine Basis ist und ermitteln Sie gleichzeitig die Koordinaten von x bezüglich dieser Basis.