Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 2 (bis 12.3.2020)

Aufgabe 7. In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $A(1,0,2)$, $B(0,-1,1)$ die Ebene, die durch die Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und den Punkt $P(0,2,3)$ gegeben ist?

Aufgabe 8. Im $\mathbb{R}^3$ bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(5,1,13)$ von der Ebene durch die Punkte $A(3,-2,0)$, $B(4,6,3)$, $C(6,2,-1)$.

Aufgabe 9. Zeigen Sie: Zwei Gleichungen

$$ax + by = c \quad \text{und} \quad a'x + b'y = c'$$

beschreiben genau dann die gleiche Gerade in $\mathbb{R}^2$, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$(a', b', c') = \mu \cdot (a, b, c).$$

Aufgabe 10. a) Beweisen Sie für das äussere Produkt $\times$ in $\mathbb{R}^3$ und das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^3$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \ \langle x \times y, x \rangle = \langle x \times y, y \rangle = 0.$$

b) Finden Sie eine Formel für einen Vektor in $\mathbb{R}^2$, der zu einem Vektor in $\mathbb{R}^2$ orthogonal ist. Finden Sie eine Formel für einen Vektor in $\mathbb{R}^3$, der zu einem Vektor in $\mathbb{R}^3$ orthogonal ist.

Aufgabe 11. Ist folgende Behauptung richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel) Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Familie von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, r\}$ gegeben. Dann gilt: Wenn das System $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$ linear abhängig ist, dann

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r).$$

Aufgabe 12. Seien u, v, w linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sind die Vektoren

$$2u - v - w, \quad u - 2v - w, \quad u - v - 2w$$

linear abhaͤngig?