Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Übungsblatt 13 (bis 25.6.2020)

Aufgabe 63. Geben Sie eine orthogonale Matrix an, die

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

Aufgabe 64 Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 65. Wir betrachten den Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der rellen 2×2 Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $M_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto MA$ linear ist.

(c) Es sei C die Matrix von T bezüglich der Basis B. Berechnen Sie $\det(C)$.

(d) Ist jede normale Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch ?

Aufgabe 66. Sei A eine orthogonale 3×3 Matrix. Zeigen Sie für alle $x,\ y \in \mathbb{R}^3$:

$$(Ax) \times (Ay) = \det(A) \cdot A(x \times y).$$

Aufgabe 67. Berechnen Sie, für $n \geq 2$, die Determinante d_n der $n \times n$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

wie folgt: Zeigen Sie, für $n \geq 4$, $d_n = 2 \cdot d_{n-1} - d_{n-2}$ und erraten und beweisen Sie mit vollständiger Induktion die (sehr einfache) Formel für d_n.

Übungsblatt 12 (bis 18.6.2020)

Aufgabe 58. Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Ist A eine selbstadjungierte Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, so gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht (auch wenn es weniger als n verschiedene Eigenwerte von A gibt).

Aufgabe 59.

a) Sei $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine selbstadjungierte, nilpotente lineare Abbildung. F nilpotent bedeutet: $F^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $F = 0$, die Nullabbildung.

b) Sei $T : V \to V$ normal. Zeigen Sie: T und T^* besitzen dieselben Eigenvektoren.

Aufgabe 60. Geben Sie die Koordinatenvektoren von $u, v \in \mathbb{C}^4$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ an:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 61. Bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sind die Matrixdarstellungen von $A, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der Abbildungen A und B bezüglich der Basis

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 62. Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ über $\mathbb{R}$?

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (0, \pi)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix}, \quad \omega, \mu \geq 0.$$

Übungsblatt 11 (bis 11.6.2020)

Aufgabe 53. Wir versehen $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v$$

worin u, v die Spaltenvektoren der Koordinaten zweier Elemente von V bezüglich einer Basis von V sind. Bestimmen Sie (mit Hilfe einer Matrixdarstellung von T) die Adjungierte der linearen Abbildung $T : V \to V,\ T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 5y \\ 7x + y \end{pmatrix}$.

Aufgabe 54. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ein linearer Operator $T : V \to V$ heisst *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$ und er heisst *normal*, falls $T \circ T^* = T^* \circ T$. Zeigen Sie:

a) Für selbstadjungierte Operatoren S, T ist $S \circ T$ genau dann selbstadjungiert, wenn $S \circ T = T \circ S$.

b) T ist genau dann normal, wenn für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle.$$

Aufgabe 55. Sei C eine symmetrische und positiv definite Matrix und $K = A^T C A$. Unter welcher Bedingung an die $m \times n$ - Matrix A $(m \geq n)$ kann die Funktion

$$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ P(x) = \frac{1}{2}\langle x, Kx\rangle - \langle f, x\rangle$$

ihr Minimum an mehreren Stellen annehmen? Konstruieren Sie ein nicht-triviales Beispiel.

Aufgabe 56. Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & -2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Unter welcher Bedingung an a, b, d hat A vier linear unabhängige Eigenvektoren?

Aufgabe 57. Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und A, B lineare Operatoren in V. Beweisen Sie: λ ist genau dann ein Eigenwert von $A \circ B$, wenn λ ein Eigenwert von $B \circ A$ ist.

Übungsblatt 10 (bis 28.5.2020)

Aufgabe 48. Es seien V ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Zeigen Sie für x, $y \in V$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \langle v_i, y \rangle.$$

Aufgabe 49. Wie in den Anregungen zur Federkette der Vorlesung ("andere Randbedingungen"): n Massen $m_1, \ldots, m_n$ sind als lineare Kette mit Federn (Federkonstanten $c_1, \ldots, c_n$) verbunden und hängen senkrecht im Gravitationsfeld (Beschleunigung g.) Formulieren Sie das lineare Gleichungssystem, dessen Lösung die Gleichgewichtslage dieser Struktur beschreibt.

Aufgabe 50. Wie in den Anregungen zur Federkette der Vorlesung ("zusätzliche Federn spannen"): zwei Massen m_1, m_2 hängen senkrecht im Gravitationsfeld (Beschleunigung g). m_1 ist mit der oberen unbeweglichen Aufhängung durch Feder c_1 verbunden und mit m_2 durch c_2. Ferner ist m_2 mit der unteren unbeweglichen Aufhängung durch Feder c_4 verbunden und zusätzlich mit der oberen Aufhängung durch Feder c_3. Formulieren Sie das lineare Gleichungssystem, dessen Lösung die Gleichgewichtslage dieser Struktur beschreibt. Wählen Sie Werte für $g, m_1, m_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ so, dass Sie das Gleichungsystem leicht auf Papier lösen können.

Aufgabe 51. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst negativ definit, falls $x^T A x < 0$ für alle $x \neq 0$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

- A negativ definit $\Leftrightarrow$ $-A$ positiv definit.
- A negativ definit $\Rightarrow$ A^2 positiv definit.
- A^2 positiv definit $\Rightarrow$ A positiv definit oder A negativ definit.

Aufgabe 52. Zeigen Sie, dass $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{2}\langle x, Kx \rangle - \langle f, x \rangle$ für $K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ genau ein Minimum besitzt und berechnen Sie dieses für $f = (-8, 4, -16)^T$.

Übungsblatt 9 (bis 14.5.2020)

Aufgabe 43. Finden Sie die orthogonale Projektion von $y \in V$ auf den Unterraum U des Vektorraums V mit einem Skalarprodukt, wobei

a) $V = \mathbb{R}^3$, $y = (2,1,3)^T$, $U = \{(x,y,z)^T : x + 3y - 2z = 0\}$,

b) $V = C([0,1])$ mit $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, $y(x) = 4 + 3x - 2x^2$, $U = \mathbb{P}_1$.

Aufgabe 44. Seien V, W zwei endlichdimensionale Vektoräume mit Skalarprodukten und $A : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass

a) $\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$,
b) $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$,
c) $\ker(AA^*) = \ker(A^*)$, und
d) $\operatorname{im}(A^*A) = \operatorname{im}(A^*)$.

Aufgabe 45. a) Formulieren Sie die Aussage $(ST)^* = T^*S^*$ mit Vektorräumen U, V, W und beweisen Sie diese.

b) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x_1, x_2)^T = (3x_2, -x_1, 4x_1)^T$. Bestimmen Sie T^* bezüglich der Standard-Skalarprodukte ohne Matrizen analog zum Beispiel in der Vorlesung.

Aufgabe 46. Sei $T : V \to W$ ein linearer Operator zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V, W mit Skalarprodukten (die beide der Einfachheit halber mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet werden) und U ein Untervektorraum von W. Zeigen Sie:

$$T^*(U^\perp) = (T^{-1}(U))^\perp.$$

Aufgabe 47. Für V und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wie in Aufgabe 43b) bestimmen Sie den adjungierten Operator von $T : V \to V$,

$$Tf(x) = \int_0^1 e^{x-y} f(y)\, dy\,, \quad x \in [0,1].$$

Übungsblatt 8 (bis 7.5.2020)

Aufgabe 38. Seien U und W zwei Unterräume eines endlichdimensionalen Vektorraums mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass

$$(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp, \quad \text{und}$$
$$(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp.$$

Aufgabe 39. Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt auf $V = \mathcal{C}([0,1])$:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx. \tag{1}$$

Sei $U = \{p \in \mathbb{P}_3, p(0) = p'(0) = 0\}$ der Unterraum von V. Bestimmen Sie eine Basis von U. Finden Sie das Polynom $p \in U$, das von dem Polynom $q(x) = 2 + 3x$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 40. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $P : V \to V$ eine linear Abbildung, sodass $P^2 = P$. Zeigen Sie:

a) wenn $u \perp v$ für alle $u \in \operatorname{im}(P)$ und alle $v \in \ker(P)$, dann existiert ein Unterraum U von V, sodass $P = P_U$.

b) wenn $\|Pu\| \leq \|u\|$ für alle $u \in V$, dann existiert ein Unterraum U von V, sodass $P = P_U$.

Hinweis: Man kann b) aus a) und Bsp. 20c) erhalten.

Aufgabe 41. Betrachten Sie das Skalarprodukt (1) auf $\mathbb{P}_2$ und das Funktional $\varphi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$, das durch $\varphi(p) = p(0) + p'(1)$ definiert ist. Finden Sie $q \in \mathbb{P}_2$, sodass $\varphi(p) = \langle q, p\rangle$ für alle $p \in \mathbb{P}_2$.

Aufgabe 42. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie T^*f, wobei

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $V = \mathbb{P}_2$ mit (1), $Tg = g' + 3g$ und $f(x) = 4 - x + 3x^2$.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie T^* selbst nicht finden sollen. Tatsächlich ist dies in b) ziemlich schwierig. Auf der anderen Seite kann die Übung nur mit dem Stoff aus der Vorlesung gelöst werden. Die Integralrechnung in b) ist etwas langwierig, aber bitte berechnen Sie auch alle Integrale.

Übungsblatt 7 (bis 30.4.2020)

Aufgabe 33. Sei V ein Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt und sei U ein endlichdimensionaler Unterraum von V. Beweisen Sie, dass $U = (U^\perp)^\perp$.

Aufgabe 34. a) Seien $u_1 = (2, -1, 1, 0)^T$ und $u_2 = (1, -1, 3, -1)^T$. Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ des Unterraums $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2\}) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarproduktes. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U und eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

b) Finden Sie die explizite Form der orthogonalen Projektion $P_U : \mathbb{R}^4 \to U$.

Aufgabe 35. Betrachten Sie die folgende Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist (d.h., P ist linear und $P \circ P = P$) und $\mathbb{R}^2 = \operatorname{im}(P) \oplus \ker(P)$ (Direkte Summe). Ist P orthogonal?

Aufgabe 36. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, sodass $f \circ f = f$ gilt und sei $g = id_V - f$. Zeigen Sie:

a) $g \circ g = g$,
b) $g \circ f = f \circ g = 0$ (Nullabbildung),
c) $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$ und $\ker(f) = \operatorname{im}(g)$.

Aufgabe 37. Seien $U = \mathcal{L}(\{(1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 2)^T\}) \subset \mathbb{R}^4$ und $v = (1, 2, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$. Finden Sie $u \in U$, sodass $\|v - u\| \leq \|v - z\|$ für alle $z \in U$.

Übungsblatt 6 (bis 23.4.2020)

Aufgabe 28. Berechnen Sie den Winkel zwischen einer Diagonale eines Würfels und einer seiner Kanten.

Aufgabe 29. Zeigen oder widerlegen Sie: es gibt ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ so dass

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

für $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ die entsprechende induzierte Norm ist.

Aufgabe 30. a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einer Norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$. Sei $d : V \times V \to [0, \infty)$ eine Abbildung, die durch $d(x, y) = \|x - y\|$ für $x, y \in V$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf V ist.

b) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

eine Metrik auf V definiert ist, für die keine induzierte Norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ existiert, so dass $\|x - y\| = d(x, y)$.

Aufgabe 31. Diese Übung bezieht sich auf die Vorlesung. Verwenden Sie entsprechende Skalarprodukte aus der Vorlesung.

a) Stellen Sie $f(x) = 1 + x + 4x^2$ und $g(x) = 4 + 3x$ als Linearkombination der Legendre Polynomen P_0, P_1 und P_2 dar.

b) Berechnen Sie die ersten drei Hermite Polynome H_0, H_1 und H_2.

Aufgabe 32. Zeigen oder widerlegen Sie: es gibt eine Basis $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ von $\mathbb{P}_3$ (=Menge aller Polynome vom Grad ≤ 3), so dass keines der Polynome f_1, f_2, f_3, f_4 den Grad 2 hat.

Übungsblatt 5 (bis 4.2.2020)

Aufgabe 23. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ ein Unterraum gegeben durch die Ebene $x - y + z = 0$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 24. Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ ein orthonormales m-Tupel in einem Vektorraum V, $\dim V = n$. Sei $v \in V$. Zeigen Sie, dass

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle e_i, v\rangle|^2$$

genau dann, wenn $v \in span(e_1, \ldots, e_m)$.

Aufgabe 25. Im $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ sei das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

definiert.

a) Für $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ berechnen Sie $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$ und $d(f, g) = \|f - g\|$, und bestimmen Sie $h \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$, $h \neq 0$, die orthogonal zu f ist.

b) Seien $\mathbb{P}_2 \subset \mathcal{C}([0, 2\pi])$ (=Menge aller Polynome vom Grad ≤ 2) und $\mathcal{B} = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$. Mit dem Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von der Basis $\mathcal{B}$ aufgespannten Vektorraum $\mathbb{P}_2$.

Aufgabe 26. Sei $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$. Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren um eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3 = span(e_1, e_2, e_3)$ (die kanonische Basis) hinsichtlich $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ zu ermitteln.

Freiwillig: Zeigen Sie, dass $\langle x, y\rangle = x^T Ay$ in $\mathbb{R}^3$ tatsächlich das Skalarprodukt ist.

Aufgabe 27. Sei

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ hinsichtlich eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und berechnen Sie $\left\langle (1, 4)^T, (2, 0)^T \right\rangle$.

Tipp. Schauen Sie sich noch einmal die Übungen 18b und 26 an.

Übungsblatt 4 (bis 26.3.2020)

Aufgabe 18. Bestimmen Sie, ob die folgenden Formen ein Skalarprodukt definieren, wenn

a) $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = ac - bd$ in $\mathbb{R}^2$,

b) $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2$ in $\mathbb{R}^2$,

c) $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1\overline{y}_1 - 2x_1\overline{y}_2 - 2x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2$ in $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe 19. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^4$, $x = (1, 1, -1, 1)^T$ und $y = (1, 1, 1, 1)^T$.

a) Berechnen Sie $\|x\|$, $\|y\|$, $\langle x, y \rangle$ und $\sphericalangle(x, y)$.

b) Finden Sie eine Basis des $U = \{z \in \mathbb{R}^4 : z \perp x \text{ und } z \perp y\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

c) Finden Sie alle Vektoren $u = (a, b, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4$ so dass $\sphericalangle(x, u) = \frac{\pi}{3}$.

d) Finden Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$ mit $x \in \mathcal{B}$.

Aufgabe 20. Sei V ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie:

a) Wenn $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$, dann $x + y \perp x - y$ (Geben Sie die geometrische Interpretation).

b) Wenn $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\langle x, y \rangle = 1$, dann $x = y$.

c) Seien $x, y \in V$. Es gilt: $\langle x, y \rangle = 0$ genau dann, wenn $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 21. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors x auf den von b_1, b_2 im $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ aufgespannten Unterraum:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22. In einem 2-dimensionalen unitären Vektorraum mit der Basis (b_1, b_2) gelte $\langle b_1, b_1 \rangle = 4$ und $\langle b_2, b_2 \rangle = 1$. Zeigen Sie: für $\langle b_1, b_2 \rangle = c$ sind genau alle Werte mit $|c| < 2$ möglich.

Tipp: betrachten Sie a) $0 \leq \langle -cb_1 + 4b_2, -cb_1 + 4b_2 \rangle$, *und b)* $\langle x, y \rangle = 4\overline{x}_1y_1 + \overline{c}\,\overline{x}_1y_2 + c\overline{x}_2y_1 + \overline{x}_2y_2$.

Übungsblatt 3 (bis 19.3.2020)

Aufgabe 13. a) Sei g die Gerade im $\mathbb{R}^2$, welche auf zueinander senkrechten Koordinatenachsen die Abschnitte $a \neq 0$ und $b \neq 0$ hat (a und/oder b könnten auch negativ sein). Zeigen Sie: $g = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1\right\}$.

b) Bestimmen Sie eine Gerade des $\mathbb{R}^2$, die durch $(6, 8)$ verläuft und mit den Koordinatenachsen ein Dreieck mit der Fläche 12 bildet.

Aufgabe 14. Zeigen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts im $\mathbb{R}^3$: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms, das durch die Diagonalen eines gegebenen Parallelogramms aufgespannt wird, ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des gegebenen Parallelogramms.

Aufgabe 15. Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$. Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

a) eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{C}^2$,
b) eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen in $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 16. Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden:

i) $n = 2, v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$.
ii) $n = 3, v_1 = (4, 6, 8), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (2, 4, 6), v_4 = (2, 3, 4)$.
iii) $n = 3, v_1 = (1, -2, 13), v_2 = (0, 2, -3), v_3 = (0, 0, -5)$.

Aufgabe 17. Gegeben ist der Vektor x in Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3, e_4) und Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie fest, dass (b_1, b_2, b_3, b_4) eine Basis ist und ermitteln Sie gleichzeitig die Koordinaten von x bezüglich dieser Basis.

Übungsblatt 2 (bis 12.3.2020)

Aufgabe 7. In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $A(1,0,2)$, $B(0,-1,1)$ die Ebene, die durch die Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und den Punkt $P(0,2,3)$ gegeben ist?

Aufgabe 8. Im $\mathbb{R}^3$ bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(5,1,13)$ von der Ebene durch die Punkte $A(3,-2,0)$, $B(4,6,3)$, $C(6,2,-1)$.

Aufgabe 9. Für $P(x,y,z,w)$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ bestimmen Sie den Abstand des Punktes P von der Hyperebene, in der die Punkte $A(3,2,1,-1)$, $B(4,2,1,-1)$, $C(3,2,0,-2)$ und $D(2,2,0,-1)$ liegen.

Aufgabe 10. Zeigen Sie: Zwei Gleichungen

$$ax + by = c \quad \text{und} \quad a'x + b'y = c'$$

beschreiben genau dann die gleiche Gerade in $\mathbb{R}^2$, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt, so dass

$$(a', b', c') = \mu \cdot (a, b, c).$$

Aufgabe 11. a) Beweisen Sie für das äussere Produkt $\times$ in $\mathbb{R}^3$ und das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $\mathbb{R}^3$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \ \langle x \times y, x \rangle = \langle x \times y, y \rangle = 0.$$

b) Finden Sie eine Formel für einen Vektor in $\mathbb{R}^2$, der zu einem Vektor in $\mathbb{R}^2$ orthogonal ist. Finden Sie eine Formel für einen Vektor in $\mathbb{R}^3$, der zu einem Vektor in $\mathbb{R}^3$ orthogonal ist.

Aufgabe 12. a) Ist folgende Behauptung richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel) Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Familie von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \ldots, r\}$ gegeben. Dann gilt: Wenn das System $(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$ linear abhängig ist, dann

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r).$$

b) Seien u, v, w linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum über $\mathbb{R}$. Sind die Vektoren

$$2u - v - w, \quad u - 2v - w, \quad u - v - 2w$$

linear abhaïgig?

Übungsblatt 1 (bis 5.3.2020)

Aufgabe 1. Sei p eine Gerade gegeben durch $p = \{(1,2) + t \cdot (1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so dass $p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$.
b) Bestimmen Sie den Schnitt der Geraden p und der x-Achse und der y-Achse.
c) Bestimmen Sie, ob die Punkte $(2,3)$, $(3,2)$ und $(-1,1)$ auf p liegen oder nicht.

Aufgabe 2. Sei q eine Gerade gegeben durch $q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 3\}$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Finden Sie die Parameterdarstellung der Geraden q.
b) Bestimmen Sie den Schnitt der Geraden q und p aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Seien E_1 and E_2 zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1\}$ und $E_2 = \{(3,-1,1) + s \cdot (1,1,2) + t \cdot (1,0,-1) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Geraden $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe 4. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 6 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Welche geometrische Interpretation hat die Lösung?

Aufgabe 5. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & 3z & = & a \\ x & - & ay & + & z & = & 2 \end{array}$$

in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$. Welche geometrische Interpretation hat die Lösung?

Aufgabe 6. Lösen Sie die Gleichungssysteme

$$(i) \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & b \end{array} \qquad\qquad (ii) \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ & & & & z & = & c \end{array}$$

Welche geometrische Interpretation haben die Lösungen abhängig von a, b und c?