

MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE

VORLESUNGSSKRIPT, WINTERSEMESTER 2025/26

Christian Clason

Stand vom 7. Februar 2026

Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Universität Graz

INHALTSVERZEICHNIS

1	MESSBARE MENGEN UND FUNKTIONEN	1
1.1	Erzeugte σ -Algebren	3
1.2	Borel-Mengen und -Funktionen	6
1.3	Numerische Funktionen	9
2	MASSE	14
2.1	Elementare Eigenschaften	15
2.2	Eindeutigkeit	17
2.3	Das Lebesgue-Maß	19
2.4	Nullmengen	21
3	DAS LEBESGUE-INTEGRAL	23
4	INTEGRIERBARE FUNKTIONEN	31
5	KONVERGENZ UND VOLLSTÄNDIGKEIT	38
5.1	Konvergenz im Mittel	38
5.2	L^p -Räume	41
5.3	Konvergenz im Maß	42
6	DICHTEN UND ABSOLUTSTETIGKEIT	45
7	MEHRFACHINTEGRALE UND PRODUKTMASSE	52
7.1	Doppelintegrale	52
7.2	Produktmaße	56
7.3	Kerne	58
8	KONSTRUKTION VON MASSEN	60
8.1	Äußere Maße und Fortsetzung	60
8.2	Der Darstellungssatz von Riesz	66
8.3	Hausdorff-Maße	69

EINLEITUNG

Ausgangspunkt der Maßtheorie ist eine der ältesten Fragestellungen der Mathematik: Die Berechnung von Flächen- oder Volumeninhalten von regelmäßigen Körpern. Das Ziel war, eine allgemeine Theorie zu entwickeln, die *beliebigen* – kompliziert berandeten oder sogar unendlich-dimensionalen – Mengen einen sinnvollen Inhalt zuweisen kann. Schnell hat sich herausgestellt, dass dies unmöglich ist: Das Auswahlaxiom erlaubt die Konstruktion zu “paradoxe” Mengen; das bekannteste Beispiel ist das *Banach–Tarski-Paradoxon*, eine Zerlegung der dreidimensionalen Einheitskugel in drei disjunkte Teilmengen, die durch Translation und Rotation zu *zwei* Einheitskugeln zusammengesetzt werden können. (Siehe z. B. [Tomkowicz & Wagon 2016]). Solchen Mengen kann offensichtlich kein sinnvoller Inhalt zugewiesen werden, ohne sofort Widersprüche zu erzeugen. Es ist daher zwingend notwendig, sich zuerst auf – hoffentlich hinreichend große – Systeme von “messbaren Mengen” einzuschränken, auf denen dann ein sinnvolles (Inhalts-)“Maß” definiert werden kann.

Dies ist kein Selbstzweck; die Entwicklung der Maßtheorie Anfang des 20. Jahrhunderts war konkret motiviert durch die folgenden beiden Anwendungen:

- In der **Analysis** war man interessiert an der Integration von Funktionen mehrerer Variablen. Für Funktionen einer Variablen ist der intuitive Ansatz der “Fläche unter dem Graphen” durch das Riemann-Integral rigoros formalisiert worden: Man zerlegt das Integrationsintervall in eine Folge von gleichen Teilintervallen, nimmt die Funktion auf diesen konstant an, und summiert die Flächen der Teilrechtecke auf. Jeder Versuch, diesen Ansatz auf mehrdimensionale Integrale (nicht nur über Rechtecke) zu verallgemeinern ist gescheitert, da schon im $\mathbb{R}^2$ Integrationsgebiete beliebig kompliziert sein können. Die wesentliche Idee von Lebesgue, dieses Problem zu lösen, war diesen Ansatz umzukehren: Man approximiert den *Wertebereich* der Funktion durch endlich viele Konstanten, bestimmt dazu die jeweiligen Urbilder (egal wie sie aussehen), und wendet darauf die summierte Zylinderformel “Grundfläche mal Höhe” an. Damit dies funktioniert, müssen die Urbilder einen sinnvollen Inhalt haben und daher messbar sein. (Dies sind die sogenannten *Borel-Mengen*, auf denen das *Lebesgue-Maß* als Verallgemeinerung des klassischen Volumens konstruiert werden kann.) Dies definiert die Klasse der “messbaren Funktionen”, die wesentlich größer als die der Riemann-integrierbaren Funktionen ist. Dank dieser Konstruktion hat das

Lebesgue-Integral auch weitere günstige Eigenschaften; insbesondere ist die Vertauschung von Grenzwert und Integral unter deutlich schwächeren Voraussetzungen möglich.

- In der axiomatischen **Wahrscheinlichkeitstheorie** nach Kolmogorov interpretiert man Aussagen über den Ausgang eines Zufallsexperiments als Menge von möglichen Ergebnissen, auf die die Aussage zutrifft – je größer diese Menge, desto wahrscheinlicher ist die Aussage wahr. Für Zufallsexperimente mit endlich vielen Ergebnissen (z. B. dem einfachen Würfelwurf) ist dieser Zugang intuitiv (und Schulstoff); die Anwendung auf Situationen mit überabzählbar vielen (z. B. reellwertigen) Ergebnissen erfordert wieder einen sinnvollen Inhaltsbegriff und damit die Maßtheorie. Hier zeigt sich auch der Nutzen der abstrakten Theorie: Es reicht nicht nur ein einzelner Inhaltsbegriff, sondern verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen entsprechen unterschiedlichen Inhalten. (Das Lebesgue-Maß entspricht dabei der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$.) Die “messbaren Funktionen” sind hier die *Zufallsvariablen*, mit denen Wahrscheinlichkeiten von abgeleiteten Aussagen bestimmt werden können (z. B. die Verteilung der Augensummen beim doppelten Würfelwurf aus der Gleichverteilung auf der Menge der Wurfpaare); ihr Integral gibt deren *Erwartungswert* an.

Daher ist die Maßtheorie – zusammen mit der zeitgleich entstandenen Funktionalanalysis – eine der zentralen Säulen der angewandten Mathematik.

Ziel dieser Vorlesung ist daher, die wichtigsten Begriffe und Resultate sowohl für die Analysis als auch die Maßtheorie kompakt darzustellen. Wir folgen hier eng (mit einer dem geringen Stundenumfang angepassten Auswahl und Reihenfolge) dem Buch [[Brokate & Kersting 2019](#)], das das selbe Ziel verfolgt; eine ähnlich kompakte Zusammenfassung bieten [[Werner 2009](#), Teil IV] und [[Folland 1999](#); [Tao 2011](#)]. Deutlich umfangreicher und tiefgehender sind die klassischen Lehrbücher [[Elstrodt 2018](#); [Bauer 1992](#)], die als Ergänzung und Vertiefung empfohlen werden. Die maßtheoretischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind z. B. in [[Klenke 2020](#)] ausgeführt.

Ein Hinweis zum Abschluss: Dieses Skript ist für die aktive Vorlesungsnachbereitung oder das Selbststudium gedacht; entsprechend benötigt es ein “aktives Lesen” mit Papier und Bleistift, da an vielen Stellen Beweisschritte nicht vollständig ausgeführt sind. Hier ist es unumgänglich, die – nicht immer offensichtlichen – Behauptung selbständig nebenher zu verifizieren. Um das nicht dem Zufall zu überlassen, sind entsprechende Stellen mit “(warum?)” markiert.

1 MESSBARE MENGEN UND FUNKTIONEN

Wir beginnen mit der Definition von “messbaren” Mengen, für die wir im nächsten Kapitel einen sinnvollen Inhaltsbegriff definieren können, sowie von mit diesem Begriff verträglichen “messbaren” Funktionen. Dabei gehen wir axiomatisch vor und definieren diese über die Eigenschaften, die wir von solchen Mengen erwarten; diese sind motiviert durch die Operationen, durch die wir komplizierte Mengen durch einfachere (mit intuitiv bekannten Inhalten) annähern möchten (vergleiche die Bestimmung der Kreisfläche durch Archimedes mit Hilfe inskribierter Polyeder).

Zunächst etwas Notation: Wir bezeichnen mit $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von endlich oder abzählbar vielen Mengen und mit $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ deren Vereinigung.

Definition 1.1. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von S . Gilt

- (i) $S \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A}$ impliziert $A^C := S \setminus A \in \mathcal{A}$,
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ impliziert $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$,

dann heißt $\mathcal{A}$ σ -Algebra. Man bezeichnet dann $(S, \mathcal{A})$ als *messbaren Raum* und ein $A \in \mathcal{A}$ als *messbare Menge* (bezüglich $(S, \mathcal{A})$).

Ist die Menge S oder die σ -Algebra $\mathcal{A}$ aus dem Kontext offensichtlich, wird sie üblicherweise nicht explizit erwähnt. Die Eigenschaft (iii) ist hier wesentlich: Sie garantiert, dass das System messbarer Mengen groß genug für die Zwecke der Anwendung ist, aber nicht so groß, dass es “paradoxe Mengen” enthalten muss!

Weitere nützliche Eigenschaften, die messbare Mengen intuitiv erfüllen sollten, folgen direkt aus diesen drei Axiomen mit Hilfe der Mengenlehre und müssen daher nicht explizit gefordert werden.

- (i) $\emptyset = S^C \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ impliziert $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^C \right)^C \in \mathcal{A}$,
- (iii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ impliziert $A_1 \setminus A_2 := A_1 \cap A_2^C \in \mathcal{A}$,
- (iv) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ impliziert $A_1 \Delta A_2 := (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \in \mathcal{A}$.

Beispiel 1.2. Sei $S \neq \emptyset$. Dann ist

- (i) $\mathcal{A} := \{S, \emptyset\}$ die *kleinste* σ -Algebra,
- (ii) $\mathcal{A} := \mathcal{P}(S)$ die *größte* σ -Algebra.

Die folgende Definition charakterisiert diejenigen Funktionen, die mit messbaren Mengen verträglich sind.

Definition 1.3. Seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $\varphi : S \rightarrow S'$ eine Funktion. Gilt

$$\varphi^{-1}(A') := \{x \in S \mid \varphi(x) \in A'\} \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } A' \in \mathcal{A}',$$

so heißt φ $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$ -messbar.

Sind die messbaren Räume aus dem Kontext klar, lässt man die σ -Algebren in der Regel weg. In anderen Worten: Eine Funktion ist messbar genau dann, wenn das Urbild jeder messbaren Menge wieder messbar ist. (Vergleiche die topologische Charakterisierung von stetigen Funktionen!)

Das folgende nicht-triviale Beispiel ist eine allgemein nützliche Konstruktion.

Beispiel 1.4 (Spur- σ -Algebra). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $S_1 \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge. Dann ist

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subset S_1 \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra auf S_1 (*warum?*), genannt *Spur- σ -Algebra* von $\mathcal{A}$ auf S_1 .

Sei nun $S_2 := S_1^C$ und $\mathcal{A}_2$ die Spur- σ -Algebra von $\mathcal{A}$ auf S_2 . Dann ist $\varphi : S \rightarrow S'$ genau dann $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar, wenn $\varphi|_{S_1} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}'$ und $\varphi|_{S_2} : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}'$ -messbar sind; dies folgt (*warum?*) aus

$$\varphi^{-1}(A') = (\varphi^{-1}(A') \cap S_1) \cup (\varphi^{-1}(A') \cap S_2).$$

Der folgende “Fundamentalsatz” über messbare Funktionen besagt, dass die Komposition messbarer Funktionen messbar ist (vergleiche wieder stetige Funktionen).

Satz 1.5 (Komposition messbarer Funktionen). Seien $(S, \mathcal{A})$, $(S', \mathcal{A}')$, und $(S'', \mathcal{A}'')$ messbare Räume. Sind $\varphi : S \rightarrow S'$ und $\psi : S' \rightarrow S''$ messbar, dann ist auch

$$\psi \circ \varphi : S \rightarrow S'', \quad x \mapsto \psi(\varphi(x)),$$

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}''$ -messbar.

Beweis. Sei $A'' \in \mathcal{A}''$. Dann ist $A' := \psi^{-1}(A'') \in \mathcal{A}'$ (denn ψ ist $\mathcal{A}'$ - $\mathcal{A}''$ -messbar) und damit auch $(\psi \circ \varphi)^{-1}(A'') = \varphi^{-1}(\psi^{-1}(A'')) = \varphi^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ (denn φ ist $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar). $\square$

1.1 ERZEUGTE σ -ALGEBREN

Üblicherweise gibt man σ -Algebren nicht durch die Menge ihrer Elemente an (das ist nur für langweilig kleine Systeme möglich). Stattdessen wählt man ein System von Teilmengen, die unbedingt messbar sein sollen, und verlangt, dass die betrachtete σ -Algebra diese enthält.

Definition 1.6 (Erzeuger). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen von S . Gilt

$$(i) \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{A},$$

$$(ii) \quad \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}} \text{ für jede } \sigma\text{-Algebra } \tilde{\mathcal{A}} \text{ auf } S \text{ mit } \mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{A}},$$

dann heißt $\mathcal{E}$ *Erzeuger* von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}$ *erzeugte σ -Algebra*, geschrieben $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

In anderen Worten: $\sigma(\mathcal{E})$ ist die *kleinste* σ -Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Ein kanonisches Beispiel werden wir im nächsten Abschnitt sehen; zunächst müssen wir klarstellen, dass wir für jedes System eine σ -Algebra erzeugen können.

Satz 1.7 (Existenz erzeugter σ -Algebren). Sei $S \neq \emptyset$ und $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen von S . Dann existiert eine von $\mathcal{E}$ erzeugte σ -Algebra

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset S \mid A \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ für jede } \sigma\text{-Algebra } \tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{E} \right\}.$$

Beweis. Zunächst gilt sicher $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(S)$, und $\mathcal{P}(S)$ ist eine σ -Algebra. Also gibt es zumindest eine σ -Algebra $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{E}$. Weiter ist der Durchschnitt von (beliebigen, und damit insbesondere $\mathcal{E}$ umfassenden) σ -Algebren wieder eine σ -Algebra (*warum?*). Damit definiert die rechte Seite eine σ -Algebra. Weiter ist offensichtlich $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ sowie $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ für jede σ -Algebra $\tilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{E}$. Also ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. $\square$

Ähnlich direkt aus der Definition folgt der nächste Satz, der ein einfaches Kriterium angibt, wann zwei erzeugte σ -Algebren übereinstimmen.

Satz 1.8 (Identitätssatz). Sei $S \neq \emptyset$ und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Mengensysteme. Sei weiter $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{E}_1)$ und $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2)$. Gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A}_1$, dann ist $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Beweis. Nach Definition folgt aus $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{A}_2$ auch $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ und umgekehrt. $\square$

Beachte, dass die Umkehrung nicht gilt: verschiedene Mengensysteme können die selbe σ -Algebra erzeugen!

Analog kann man auch die Messbarkeit von Funktionen über Erzeuger charakterisieren. Der Beweis ist ein Prototyp des “Prinzips der guten Mengen”: Um zu zeigen, dass eine

Eigenschaft für alle messbaren Mengen gilt, reicht es zu zeigen, dass sie für einen Erzeuger gilt und dass das System aller Mengen mit dieser Eigenschaft selber eine σ -Algebra ist.

Satz 1.9 (Messbarkeitskriterium). Seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$. Ist $\varphi : S \rightarrow S'$ und gilt

$$\varphi^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } E' \in \mathcal{E}',$$

dann ist φ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar.

Beweis. Definiere

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A' \in \mathcal{A}' \mid \varphi^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}.$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ -Algebra (**warum?**). Weiter gilt nach Annahme $\mathcal{E}' \subset \tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}'$ sowie $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}') \subset \tilde{\mathcal{A}}$. Also ist $\mathcal{A}' = \tilde{\mathcal{A}}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Alternativ kann man andersherum vorgehen: Man wählt eine Klasse von *Funktionen*, die messbar sein sollen, und sucht eine σ -Algebra so, dass diese Funktionen messbar sind.

Definition 1.10. Sei I eine beliebige Index-Menge und $(S_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, messbare Räume sowie $\psi_i : S \rightarrow S_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann ist die durch

$$\mathcal{E} := \bigcup_{i \in I} \{\psi_i^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}_i\}$$

erzeugte σ -Algebra auf S die *kleinste σ -Algebra, bezüglich der alle ψ_i messbar sind*, geschrieben $\sigma(\{\psi_i\}_{i \in I})$.

Auch hier werden wir später Beispiele sehen. (Beachte den Unterschied zwischen einer durch eine Menge von *Mengen* und einer durch eine Menge von *Funktionen* erzeugten σ -Algebra!)

Wir können uns nun fragen, wann wiederum eine Funktion bezüglich einer so erzeugten σ -Algebra messbar ist.

Satz 1.11. Seien $(S, \mathcal{A})$, $(S', \mathcal{A}')$ und $(S_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, messbare Räume sowie $\psi_i : S \rightarrow S_i$, $i \in I$. Gilt $\mathcal{A}' = \sigma(\{\psi_i\}_{i \in I})$, dann ist $\varphi : S \rightarrow S'$ messbar genau dann, wenn $\psi_i \circ \varphi : S \rightarrow S_i$ messbar ist für alle $i \in I$.

Beweis. “ $\Rightarrow$ ”: Ist φ messbar, dann auch die Komposition $\psi_i \circ \varphi$ nach Satz 1.5, denn ψ_i ist messbar nach Konstruktion.

“ $\Leftarrow$ ”: Ist umgekehrt $\psi_i \circ \varphi$ messbar, dann ist nach Definition $(\psi_i \circ \varphi)^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ für alle $A \in \mathcal{A}_i$ und damit $\varphi^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' := \psi_i^{-1}(A)$ mit $A \in \mathcal{A}_i$ und $i \in I$. Da diese Mengen nach Annahme ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$ sind, folgt die Messbarkeit von φ aus Satz 1.9. $\square$

Das dritte, oft verwendete, Konstruktionsprinzip ermöglicht es, aus einer (endlichen oder abzählbaren) Folge $(S_1, \mathcal{A}_1), (S_2, \mathcal{A}_2), \dots$ von messbaren Räumen eine σ -Algebra auf dem Produktraum

$$S_\times := \prod_{n \geq 1} S_n = S_1 \times S_2 \times \dots := \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_n \in S_n\}$$

zu definieren.

Definition 1.12. Seien $A_n \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$. Dann heißt eine Menge der Form $A = \prod_{n \geq 1} A_n$ *messbarer Quader*. Die dadurch erzeugte σ -Algebra

$$\mathcal{A}_\otimes := \bigotimes_{n \geq 1} \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots := \sigma(\{A \subset S_\times \mid A \text{ messbarer Quader}\})$$

heißt *Produkt- σ -Algebra* auf $S_\times$. Für $S_1 = S_2 = \dots = S$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \dots = \mathcal{A}$ schreiben wir auch kurz $S^d := S_\times$ und $\mathcal{A}^d = \mathcal{A}_\otimes$, wobei d die Länge der Folgen bezeichnet.

Speziell ist S^∞ die Menge der Folgen in S .

Die Produkt- σ -Algebra lässt sich auch über messbare Funktionen erzeugen, in diesem Fall der *Projektionsabbildungen*

$$\pi_i : S_\times \rightarrow S_i, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto x_i.$$

Lemma 1.13. Seien $(S_1, \mathcal{A}_1), (S_2, \mathcal{A}_2), \dots$ messbare Räume. Dann gilt $\mathcal{A}_\otimes = \sigma(\{\pi_1, \pi_2, \dots\})$.

Beweis. Einerseits ist für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$

$$\pi_i^{-1}(A_i) = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times A_i \times S_{i+1} \times \dots$$

ein messbarer Quader und damit nach Definition in $\mathcal{A}_\otimes$. Insbesondere sind also die Projektionsabbildungen messbar. Andererseits gilt für alle $A_n \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$

$$A_1 \times A_2 \times \dots = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) \cap \dots \in \sigma(\{\pi_n\}_{n \geq 1})$$

Die Behauptung folgt nun aus [Satz 1.8](#). □

Aus [Satz 1.11](#), angewendet auf die Projektionsabbildungen, folgt nun sofort, dass eine Funktion in den Produktraum messbar ist genau dann, wenn die Komponenten messbar sind.

Folgerung 1.14. Seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S_1, \mathcal{A}_1), (S_2, \mathcal{A}_2), \dots$ messbare Räume sowie $\varphi_n : S \rightarrow S_n$, $n \geq 1$. Dann ist

$$\varphi : S \rightarrow S_\times, \quad x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots)$$

$\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_\otimes$ -messbar genau dann, wenn φ_n $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}_n$ -messbar ist für alle $n \geq 1$.

1.2 BOREL-MENGEN UND -FUNKTIONEN

Wir haben nun alle Begriffe zur Hand, um die kanonische σ -Algebra in der Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie zu definieren. In Folge sei (S, d) stets ein metrischer Raum, d. h. $d : S \times S \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Abbildung mit

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in S$,
- (ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in S$,
- (iii) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

Zur Erinnerung: in einem metrischen Raum betrachtet man die *Kugeln*

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in S \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Eine Menge $O \subset S$ heißt dann *offen*, wenn für alle $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset O$ existiert. Eine Menge $C \subset S$ heißt *abgeschlossen*, wenn $S \setminus C$ offen ist.

Definition 1.15. Sei (S, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O} := \{O \subset S \mid O \text{ offen}\}$. Dann heißt $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{O})$ *Borel-Algebra* auf S ; ein $B \in \mathcal{B}$ nennt man *Borel-messbar* oder *Borel-Menge*. Sind $(S, d), (S', d')$ metrische Räume mit Borel-Algebra $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ und $\varphi : S \rightarrow S'$ $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}'$ -messbar, dann nennt man φ *Borel-messbar* oder *Borel-Funktion*.

Niemand kann sagen, wie eine “typische” Borelmenge aussieht – das ist auch unwichtig, solange garantiert ist, dass alle “guten” Mengen Borel-messbar sind. (Alle anderen schleppt man einfach mit; das ist der Preis für die abstrakte Definition.)

Folgerung 1.16. Sei (S, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{C} := \{C \subset S \mid C \text{ abgeschlossen}\}$. Dann ist $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$.

Beweis. Da das Komplement einer abgeschlossenen Menge nach Definition offen ist und umgekehrt, gilt $C \subset \sigma(\mathcal{O})$ und $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Die Behauptung folgt damit aus [Satz 1.8](#). $\square$

Analog sind “gute” Funktionen Borel-messbar.

Folgerung 1.17. Seien $(S, d), (S', d')$ metrische Räume und $\varphi : S \rightarrow S'$ stetig. Dann ist φ eine Borel-Funktion.

Beweis. In topologischen (und damit insbesondere in metrischen) Räumen ist eine Funktion stetig genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Damit folgt die Behauptung aus [Satz 1.9](#). $\square$

Tatsächlich ist die Borel-Algebra die kleinste Algebra, bezüglich der alle reellwertigen stetigen Funktionen messbar sind.

Satz 1.18. Sei (S, d) ein metrischer Raum und $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\mathcal{B} = \sigma(\{\psi : S \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ stetig}\}).$$

Beweis. Setze $\mathcal{B}' := \sigma(\{\psi : S \rightarrow \mathbb{R} \mid \psi \text{ stetig}\})$. Da jede stetige Funktion Borel-messbar ist, folgt $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ (warum?). Für die andere Inklusion definiere für $C \subset S$ die Abstandsfunktion

$$\psi_C : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf \{d(x, y) \mid y \in C\} \geq 0.$$

Dann gilt für beliebige $x, y, z \in S$

$$\psi_C(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$$

und damit (Infimum über alle $z \in C$) $\psi_C(x) - d(x, y) \leq \psi_C(y)$. Vertauschen von x und y und Symmetrie von d ergibt dann

$$|\psi_C(x) - \psi_C(y)| \leq d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in S,$$

d. h. ψ_C ist (Lipschitz-)stetig. Falls C abgeschlossen ist, gilt weiter $\psi_C(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in C$ ist. Damit ist $C = \psi_C^{-1}(\{0\})$, d. h. jede abgeschlossene Menge ist nach Definition in $\mathcal{B}'$. Also gilt auch $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. $\square$

Die Klasse der Borel-Funktionen ist aber deutlich größer als die der stetigen Funktionen. Insbesondere ist der *punktweise* Grenzwert von Borel-Funktionen wieder Borel-messbar – die analoge Eigenschaft gilt für stetige Funktionen bekanntermaßen nicht!

Satz 1.19. Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und (S', d) ein metrischer Raum mit Borel-Algebra $\mathcal{B}$. Sei $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Borel-Funktionen $\varphi_n : S \rightarrow S'$, die punktweise in S gegen ein $\varphi : S \rightarrow S'$ konvergiert, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi_n(x), \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in S$. Dann ist φ eine Borel-Funktion.

Beweis. Wir verwenden die [Satz 1.9](#) und [Folgerung 1.16](#). Sei dafür $B \subset S'$ abgeschlossen und betrachte für $\varepsilon > 0$ beliebig die offenen Mengen

$$U_\varepsilon(B) := \{y \in S' \mid d(y, z) < \varepsilon \text{ für ein } z \in B\}.$$

Ist dann $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots > 0$ eine Nullfolge, so gilt (warum?)

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(B) &= \bigcap_{k \geq 1} \{x \in S \mid \varphi_n(x) \in U_{\varepsilon_k}(B) \text{ bis auf endlich viele } n\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \{x \in S \mid \varphi_n(x) \in U_{\varepsilon_k}(B) \text{ für alle } n \geq m\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq m} \varphi_n^{-1}(U_{\varepsilon_k}(B)) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

da alle φ_n messbar sind und abzählbare Vereinigungen und Schnitte von messbaren Mengen wieder messbar sind. $\square$

Ein Spezialfall von besonderem Interesse ist die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^d$, die auf viele verschiedene Arten erzeugt werden kann. Wir verwenden dafür für $a, b \in \mathbb{R}^d$ die halboffenen Quader

$$[a, b) := [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_d, b_d)$$

sowie

$$(-\infty, b) := (-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2) \times \cdots \times (-\infty, b_d)$$

und analog für offene bzw. abgeschlossene Quader.

Satz 1.20. Die Borel-Algebra $\mathcal{B}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ wird erzeugt von

- (i) $\mathcal{E}_1 := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^d\}$,
- (ii) $\mathcal{E}_2 := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^d\}$,
- (iii) $\mathcal{E}_3 := \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^d\}$,
- (iv) $\mathcal{E}_4 := \{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}^d\}$,
- (v) $\mathcal{E}_5 := \{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}^d\}$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den – in der Wahrscheinlichkeitstheorie interessanten – Fall (iv); die restlichen Fälle gehen analog (**warum?**).

Offensichtlich gilt $\mathcal{E}_4 \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{B}^d$. Für die andere Richtung, betrachte zunächst für $a, b \in \mathbb{R}^d$ und $c_i := (b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_d)$, $i = 1, \dots, d$,

$$[a, b) = (-\infty, b) \setminus \bigcup_{i=1}^d (-\infty, c_i) \in \sigma(\mathcal{E}_4).$$

Weiter ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, und deshalb existieren für jede offene Menge $O \subset \mathbb{R}^d$ und $x \in O$ ein Intervall $[a, b)$ mit $x \in [a, b) \subset O$ und $a, b \in \mathbb{Q}^d$. Daraus folgt

$$O = \bigcup \{[a, b) \mid [a, b) \subset O, a, b \in \mathbb{Q}^d\} \in \sigma(\mathcal{E}_4),$$

da die Vereinigung abzählbar ist. Also ist $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$, und die Behauptung folgt aus [Satz 1.8](#).

(Daraus folgt zusammen mit $(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a - \frac{1}{n}, b)$ auch (iii).) □

Folgerung 1.21. Jede monotone Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

Beweis. Für monotone Funktionen ist das Urbild von Intervallen wieder ein Intervall, und diese erzeugen die Borel-Algebra. □

Die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ kann man auch als Produkt von Borel-Algebren auf $\mathbb{R}$ schreiben.

Folgerung 1.22. Es gilt $\mathcal{B}^d = \mathcal{B}_\otimes := \mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}$.

Beweis. Nach [Satz 1.20](#) werden die offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$ von halboffenen Quadermengen erzeugt, und daher ist nach Definition der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}_\otimes$.

Umgekehrt sind die Komponentenabbildungen $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_d) \rightarrow x_i$, stetig und daher Borel-messbar. Also ist nach [Lemma 1.13](#) $\mathcal{B}_\otimes = \sigma(\{\pi_i\}_{i=1, \dots, d}) \subset \mathcal{B}^d$. $\square$

1.3 NUMERISCHE FUNKTIONEN

Für die Integrationstheorie zentral ist der Spezialfall von *numerischen* oder *reellwertigen* Funktionen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ für eine beliebige Menge S . Sei im Folgenden stets $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathbb{R}$ versehen mit der Borel-Algebra.

Das folgende Beispiel ist elementar aber wichtig.

Beispiel 1.23. Sei $A \subset S$. Dann ist die *charakteristische Funktion* von A

$$\mathbb{1}_A : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

messbar genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}$ ist (warum?).

Für späteren Gebrauch halten wir die folgenden Rechenregeln für charakteristische Funktionen fest, die man leicht durch Fallunterscheidung verifiziert:

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \quad \text{falls } A \cap B = \emptyset.$$

Wir wissen auch bereits, dass stetige Funktionen messbar sind. Weitere messbare Funktionen lassen sich mit den folgenden Operationen erzeugen, die jeweils punktweise zu verstehen sind.

Lemma 1.24. Seien $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann sind messbar

- (i) $\alpha f + \beta g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f \cdot g$,
- (iii) $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$,

Beweis. Sind f, g messbar, dann ist nach [Folgerung 1.14](#) auch die Abbildung

$$(f, g) : S \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (f(x), g(x)),$$

messbar. Die Behauptungen folgen nun aus [Satz 1.5](#); zum Beispiel für (i) aus $\alpha f + \beta g = \varphi \circ (f, g)$ mit der offensichtlich stetigen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \alpha x + \beta y$. $\square$

Aussage (i) impliziert insbesondere, dass die messbaren numerischen Funktionen einen Vektorraum bilden.

Insbesondere für die konstante und damit stetige Funktion $g \equiv 0$ erhalten wir daraus

Folgerung 1.25. *Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann sind ebenfalls messbar*

- (i) $f^+ := \max\{f, 0\}$,
- (ii) $f^- := \max\{-f, 0\}$,
- (iii) $|f| = f^+ + f^-$.

Umgekehrt definieren messbare Funktionen messbare Mengen; das Arbeiten mit diesen ist in der Maß- und Integrationstheorie ein zentrales Werkzeug. (Es lohnt sich daher, sich mit diesen Definitionen vertraut zu machen.)

Lemma 1.26. *Seien $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann sind die folgenden Teilmengen von S messbar:*

- (i) $\{f = g\} := \{x \in S \mid f(x) = g(x)\}$,
- (ii) $\{f \leq g\} := \{x \in S \mid f(x) \leq g(x)\}$,
- (iii) $\{f < g\} := \{x \in S \mid f(x) < g(x)\}$,
- (iv) $\{f \neq g\} := \{x \in S \mid f(x) \neq g(x)\}$.

Beweis. Für (i) schreibe

$$\{f = g\} = (f, g)^{-1}(D) \quad \text{für} \quad D := \{x, y \mid x = y\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Diese Menge ist messbar, da D in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen und damit Borel-messbar und (f, g) nach [Folgerung 1.14](#) messbar ist. Analog zeigt man (ii).

Aussage (iii) folgt nun sofort aus $\{f < g\} = \{f \leq g\} \setminus \{f = g\} \in \mathcal{A}$ und ebenso (iv). $\square$

Wieder ist der Spezialfall $g \equiv c$ konstant besonders interessant; zum Beispiel ist f messbar genau dann, wenn $\{f \leq c\}$ messbar ist für alle $c \in \mathbb{R}$ (warum?).

Wir haben bereits gesehen, dass messbare Funktionen sich gut mit punktweiser Konvergenz vertragen. Das bauen wir für numerische Funktionen weiter aus. Dafür ist es hilfreich, die reellen Zahlen auf $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ zu erweitern. Wir legen dabei fest, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$c \pm \infty = \pm\infty, \quad c \cdot \pm\infty = \begin{cases} 0 & \text{falls } c = 0, \\ \pm\infty & \text{falls } c > 0, \\ \mp\infty & \text{falls } c < 0, \end{cases} \quad -\infty < c < \infty.$$

Dagegen sind $\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ usw. *nicht* zugelassen; wir werden später explizit garantieren müssen, dass diese Operationen nicht auftreten können. Wir versehen $\overline{\mathbb{R}}$ mit der σ -Algebra (warum?)

$$\bar{\mathcal{B}} := \left\{ B \subset \overline{\mathbb{R}} \mid B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B} \right\},$$

die erzeugt wird (warum?) durch

$$\bar{\mathcal{E}} := \{ [-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R} \} \quad \text{und} \quad \{ [a, \infty] \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

Analog betrachten wir $\overline{\mathbb{R}}^d$ mit der Produkt- σ -Algebra $\bar{\mathcal{B}}^d$ für $1 \leq d \leq \infty$.

Der Sinn dieser Erweiterung ist, dass dann das Supremum und Infimum von Folgen in jedem Fall (auch wenn es nicht endlich ist) definiert und sogar messbar ist.

Lemma 1.27. *Es sind $\bar{\mathcal{B}}^d$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -messbar*

- (i) $\sup : \overline{\mathbb{R}}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto \sup_{n \geq 1} x_n,$
- (ii) $\inf : \overline{\mathbb{R}}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto \inf_{n \geq 1} x_n.$

Beweis. Es genügt wieder, die Erzeuger zu betrachten: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sup^{-1}([-\infty, x]) &= [-\infty, x] \times [-\infty, x] \times \dots \in \bar{\mathcal{B}}^d \\ \inf^{-1}([x, \infty]) &= [x, \infty] \times [x, \infty] \times \dots \in \bar{\mathcal{B}}^d. \end{aligned} \quad \square$$

Damit folgt auch die Existenz und Messbarkeit des punktweisen Supremum und Infimum von messbaren Funktionenfolgen.

Folgerung 1.28. *Seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann sind messbar:*

- (i) $\sup_{n \geq 1} f_n = \sup \circ (f_1, f_2, \dots),$

- (ii) $\inf_{n \geq 1} f_n = \inf (f_1, f_2, \dots),$
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{m \geq 1} \sup_{n \geq m} f_n,$
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{m \geq 1} \inf_{n \geq m} f_n.$

Daraus folgt wieder die Messbarkeit des punktweisen Grenzwerts (die wir schon in Satz 1.19 gezeigt haben).

Folgerung 1.29. Seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist messbar

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ existiert} \right\} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right\} \cap \left\{ -\infty < \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n < \infty \right\}.$$

Gilt $f_n \rightarrow f$ punktweise, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ messbar.

Eine besondere Rolle in der Konstruktion des Lebesgue-Integrals spielen die *nichtnegativen* messbaren Funktionen $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty]$, die wir oft auch einfach mit $f \geq 0$ bezeichnen. (Beachte, dass für nichtnegative Funktionen der Wert $+\infty$ zugelassen ist!) Die Kernidee ist, dass wir für diese einen punktweisen Grenzwert durch ein punktweises Supremum ausdrücken können – und Suprema dürfen (im Gegensatz zu Grenzwerten) immer vertauscht werden. Dafür ist die folgende Konstruktion zentral, die wir in verschiedenen Varianten mehrfach verwenden werden.

Lemma 1.30 (monotone Approximation nichtnegativer Funktionen). Sei $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Setze für alle $k, n \in \mathbb{N}$

$$A_{k,n} := \{x \in S \mid k2^{-n} < f(x) \leq (k+1)2^{-n}\}$$

und

$$f_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_{k,n}} + n \mathbb{1}_{\{f=\infty\}}.$$

Dann gilt

- (i) $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f,$
- (ii) $\sup_{n \geq 1} f_n = f.$

Beweis. Hausaufgabe. □

Das folgende “Monotonieprinzip” für nichtnegative Funktionen entspricht dem “Prinzip der guten Mengen” für messbare Mengen: Es reicht, eine gewünschte Aussage für charakteristische Funktionen zu zeigen und dass sie abgeschlossen ist unter Linearkombination und punktweisem Supremum.

Satz 1.31 (Monotonieprinzip). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{K}$ eine Menge von Funktionen $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Gilt

- (i) $\mathbb{1}_A \in \mathcal{K}$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
 - (ii) $f, g \in \mathcal{K}$ impliziert $\alpha f + \beta g \in \mathcal{K}$ für alle $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+$,
 - (iii) $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{K}$ mit $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ impliziert $\sup_{n \geq 1} f_n \in \mathcal{K}$,
- dann enthält $\mathcal{K}$ alle nichtnegativen messbaren Funktionen.

Beweis. Sei $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und $f_1, f_2, \dots$ die Folge monotoner Approximationen aus [Lemma 1.30](#). Da f messbar ist, sind alle $A_{k,n}$ sowie $\{f = \infty\}$ in $\mathcal{A}$; aus Annahme (i) und (ii) folgt daher $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{K}$, und aus [Lemma 1.30](#) zusammen mit (iii) folgt daher $f \in \mathcal{K}$. $\square$

2 MASSE

Für messbare Mengen – und nur für solche! – können wir jetzt einen sinnvollen Inhaltsbegriff definieren.

Definition 2.1. Sei $(S, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt *Maß*, falls gilt

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt impliziert $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$.

Dann heißt $(S, \mathcal{A}, \mu)$ *Maßraum*. Weiter heißt μ

- *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(S) = 1$;
- *endlich*, falls $\mu(S) < \infty$;
- *σ -endlich*, falls $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ existieren mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $\bigcup_{n \geq 1} A_n = S$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Eigenschaft (ii) wird *σ -Additivität* genannt und bildet die wesentliche Eigenschaft ab, die wir intuitiv von Inhaltsbegriffen erwarten. Wieder ist es wesentlich, dass wir abzählbare Vereinigungen erlauben: endlich viele wären nicht ausreichend für Ausschöpfungsargumente wie nach Archimedes, während Summen mit mehr als abzählbar vielen Termen nicht definiert sind. Beachte, dass die Summe nur nichtnegative Terme enthält; sie konvergiert also (dann absolut und damit unabhängig von der Reihenfolge) oder ist (ebenfalls unabhängig von der Reihenfolge) unbeschränkt und kann daher den Wert ∞ bekommen – das wird in Folge wieder und wieder wesentlich sein. Beachte auch, dass wir *σ -Additivität* nur für *disjunkte* Mengen fordern.

Beispiel 2.2. Wir betrachten einige elementare Beispiele, deren Nachweis einfach ist. Sei jeweils $(S, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum.

- (i) $\mu(\emptyset) := 0$ und $\mu(A) := \infty$ falls $A \neq \emptyset$ ist ein Maß.
- (ii) $\mu(\emptyset) := 0$ und $\mu(A) := 1$ falls $A \neq \emptyset$ ist ein Maß genau dann, wenn $\mathcal{A} = \{S, \emptyset\}$.

(iii) Sei $x \in S$ fest. Dann ist

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß, genannt *Dirac-Maß*.

(iv) Sei $E \subset S$ endlich oder abzählbar und $\mu_x > 0$ für alle $x \in E$ gegeben. Dann ist

$$\mu(A) := \sum_{x \in A \cap E} \mu_x$$

ein sogenanntes *diskretes Maß*. Speziell für $E = S$ endlich oder abzählbar und $\mu_x = 1$ für alle $x \in S$ ist $\mu(A) = |A|$ (die Anzahl der Elemente von A) das *Zählmaß*.

2.1 ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN

Wieder folgen weitere intuitiv wünschenswerte Eigenschaften direkt aus der Definition. Dafür führen wir wieder eine Notation ein: Sei $A \subseteq S$ und $A_1, A_2, \dots \subset A$. Dann schreiben wir

- $A_n \uparrow A$, falls $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{n \geq 1} A_n = A$;
- $A_n \downarrow A$, falls $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ und $\bigcap_{n \geq 1} A_n = A$.

Der Beweis der folgenden Aussagen verwendet einfache aber in der Maßtheorie wesentliche Argumente. Beachte insbesondere, wie die Definition der σ -Algebra garantiert, dass sämtliche auftretenden Mengen messbar sind!

Satz 2.3. Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Dann gilt

- (i) $A_1 \subset A_2$ impliziert $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (Monotonie),
- (ii) $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ (σ -Subadditivität),
- (iii) $A_n \uparrow A$ impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ (σ -Stetigkeit),
- (iv) $A_n \downarrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$ impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Beweis. Zu (i): Wir schreiben $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$, wobei die Vereinigung disjunkt ist. Aus der σ -Additivität und der Nichtnegativität von Maßen folgt daher

$$\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \geq \mu(A_1).$$

Zu (ii): Wir gehen analog vor und “disjunktifizieren” schrittweise die Vereinigung, in dem wir bereits betrachtete Elemente aus der Vereinigung entfernen (für $n = 1$ ist die innere Vereinigung nach Konvention leer):

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \left(A_n \setminus \bigcup_{k < n} A_k\right)\right) = \sum_{n \geq 1} \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{k < n} A_k\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

wegen (i).

Zu (iii): Wir disjunktifizieren wieder die (diesmal geschachtelte) Vereinigung (“Zwiebelschalenprinzip”) und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \mu\left(\bigcup_{k \leq n} \left(A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j\right)\right) = \sum_{k=1}^n \mu\left(A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j\right) \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} \left(A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \mu(A), \end{aligned}$$

wobei wir nach dem Grenzübergang die σ -Additivität verwendet, die Disjunktifizierung rückgängig gemacht, und die Annahme $A_n \uparrow A$ angewendet haben.

Zu (iv): Setze $A'_n := A_1 \setminus A_n$. Dann gilt $A'_n \uparrow A_1 \setminus A$ sowie

$$\mu(A_n) + \mu(A'_n) = \mu(A_1) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A)$$

(warum?), und aus (iii) folgt durch Grenzübergang auf beiden Seiten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) + \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A) + \mu(A_1 \setminus A).$$

Wegen $\mu(A_1 \setminus A) \leq \mu(A_1) < \infty$ nach (i) folgt daraus die Behauptung. $\square$

Wir halten häufig benötigte Spezialfälle fest.

Folgerung 2.4. Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Ist $\mu(A) < \infty$, so gilt insbesondere

$$\mu(A^C) = \mu(S) - \mu(A).$$

Messbare Funktionen sind auch mit den Maßeigenschaften verträglich und erlauben, Maße zu “transportieren”.

Definition 2.5. Seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $\varphi : S \rightarrow S'$ messbar. Ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so wird durch

$$\mu' : \mathcal{A}' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad A' \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A')),$$

ein Maß auf $\mathcal{A}'$ definiert (**warum?**), genannt *Bildmaß* von μ unter φ , geschrieben $\mu' = \varphi(\mu)$.

Beachte insbesondere, wie die Definition von messbaren Funktionen direkt garantiert, dass μ' auf $\mathcal{A}'$ wohldefiniert ist.

2.2 EINDEUTIGKEIT

Eine wesentliche Frage ist, wann zwei Maße identisch sind. Dafür wollen wir natürlich nicht die Werte für alle messbaren Mengen vergleichen müssen – hat die σ -Algebra einen Erzeuger, sollte es reichen, diesen zu überprüfen. Das ist aber in der Regel nicht der Fall.

Beispiel 2.6. Betrachte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(S)$. Definiere wir betrachten nun auf $\mathcal{P}(S)$ die diskreten Maße μ, ν mit

$$\begin{aligned} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 &= \frac{1}{4}, \\ \nu_1 = \nu_3 &= \frac{1}{2}, \quad \nu_2 = \nu_4 = 0. \end{aligned}$$

Dann ist offensichtlich $\mu \neq \nu$, aber

$$\mu(\{1, 2\}) = \mu(\{2, 3\}) = \frac{1}{2} = \nu(\{1, 2\}) = \nu(\{2, 3\}).$$

Das Problem ist hier, dass die σ -Algebra alle abzählbaren Vereinigungen enthält, während die σ -Additivität nur den Wert für *disjunkte* Vereinigungen festlegt – und der Erzeuger ist im Gegensatz zur vollen σ -Algebra nicht “reich” genug, um die Disjunktifizierung anwenden zu können. Wir müssen das also durch eine Bedingung an den Erzeuger ausschliessen.

Definition 2.7. Ein Mengensystem $\mathcal{E}$ heißt *schnittstabil*, wenn $A, B \in \mathcal{E}$ impliziert $A \cap B \in \mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$.

(Wir benötigen die Schnittstabilität nur für nicht-disjunkte Mengen.)

Die Idee ist nun zu zeigen, dass wir für schnittstabile Erzeuger nur disjunkte Vereinigungen zu betrachten brauchen. Dazu führen wir als technisches Hilfsmittel die entsprechende Verallgemeinerung von σ -Algebren ein.

Definition 2.8. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{D}$ ein System von Teilmengen von S . Gilt

- (i) $S \in \mathcal{D}$,
- (ii) $A \in \mathcal{D}$ impliziert $A^C := S \setminus A \in \mathcal{D}$,
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt impliziert $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{D}$,

dann heißt $\mathcal{D}$ *Dynkin-System*. Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, dann bezeichnen wir das kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält, mit $\delta(\mathcal{E})$.

Offensichtlich ist jede σ -Algebra auch ein Dynkin-System. Der Nachweis, dass $\delta(\mathcal{E})$ existiert und ein Dynkin-System ist, geht wortgleich wie [Satz 1.7](#). Wir zeigen nun, dass ein Dynkin-System mit schnittstabilem Erzeuger bereits eine σ -Algebra ist.

Satz 2.9. Sei $\mathcal{E}$ schnittstabil und $\mathcal{D} = \delta(\mathcal{E})$ das erzeugte Dynkin-System sowie $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ die erzeugte σ -Algebra. Gilt $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass mit $\mathcal{E}$ auch $\mathcal{D}$ schnittstabil ist. Betrachte dafür für $D \in \mathcal{D}$ beliebig

$$\mathcal{D}_D := \{A \in \mathcal{D} \mid A \cap D \in \mathcal{D}\}.$$

Dann ist auch $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System: Eigenschaften (i) und (iii) folgen direkt aus der Definition ([warum?](#)), für Eigenschaft (ii) sei $A \in \mathcal{D}_D$. Dann ist auch $A \in \mathcal{D}$ und daher $A^C \in \mathcal{D}$. Daraus folgt

$$A^C \cap D = D \setminus A = \left((A \cap D) \cup D^C \right) \in \mathcal{D},$$

denn $A \cap D$ und D^C sind nach Annahme in $\mathcal{D}$ und die Vereinigung ist disjunkt. Also ist $A^C \in \mathcal{D}_D$.

Sei nun $E \in \mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ beliebig. Dann ist wegen der Schnittstabilität $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$ ([warum?](#)). Nun ist $\mathcal{D}$ als kleinstes Dynkin-System mit dieser Eigenschaft vorausgesetzt, woraus $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}$ für alle $E \in \mathcal{E}$ folgt. Nach Definition gilt daher $D \cap E \in \mathcal{D}$ für alle $E \in \mathcal{E}$ und $D \in \mathcal{D}$. Also ist gilt sogar $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$ für alle $D \in \mathcal{D}$, woraus wieder $\mathcal{D}_D = \mathcal{D}$ für alle $D \in \mathcal{D}$ folgt. Aber das ist quivalent mit der Schnittstabilität von $\mathcal{D}$ ([warum?](#)).

Dank der Schnittstabilität können wir nun jede abzählbare Vereinigung in $\mathcal{D}$ disjunktifizieren: Für alle $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ gilt

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = A_1 \cup \left(A_2 \cap A_1^C \right) \cup \left(A_3 \cap A_2^C \cap A_1^C \right) \cup \dots \in \mathcal{D},$$

da die Mengen in Klammern wegen der Eigenschaft (ii) Dynkin-Systemen und der gezeigten Schnittstabilität in $\mathcal{D}$ liegen und offensichtlich disjunkt sind. Also ist $\mathcal{D}$ sogar eine σ -Algebra. Weil $\mathcal{A} \supset \mathcal{D}$ nach Annahme die kleinste σ -Algebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält, folgt $\mathcal{D} = \mathcal{A}$. $\square$

Damit können wir den zentralen Eindeutigkeitssatz beweisen.

Satz 2.10 (Eindeutigkeitssatz). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum $\mathcal{E}$ ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$. Sind μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

- (i) $\mu(E) = \nu(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$,
- (ii) $\mu(S) = \nu(S) < \infty$ oder es gibt $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow S$ und $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ für alle $n \geq 1$,

dann ist $\mu = \nu$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir in Bedingung (ii) den zweiten Fall annehmen (sonst wähle $E_1 = S$). Wir definieren dann für $n \in \mathbb{N}$ die eingeschränkten Maße (warum?)

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n), \quad \nu_n(A) := \nu(A \cap E_n)$$

mit $\mu_n(E) = \nu_n(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$ wegen der Schnittstabilität und betrachten

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \mathcal{A} \mid \mu_n(A) = \nu_n(A)\} \subset \mathcal{A}.$$

Dann ist $\mathcal{D}_n$ das kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält (warum?). Nach Satz 2.9 gilt daher $\mathcal{D}_n = \mathcal{A}$, d. h. $\mu_n(A) = \nu_n(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten zusammen mit der σ -Stetigkeit von Maßen (Satz 2.3 (iii)) ergibt nun die Behauptung. $\square$

Der Beweis ist ein prototypisches Beispiel für ein “Ausschöpfungsargument” für σ -endliche Maße; solche Argumente werden in Folge häufig auftreten.

2.3 DAS LEBESGUE-MASS

Das kanonische Maß auf dem $\mathbb{R}^d$ ist das *Lebesgue-Maß*, das den klassischen Volumenbegriff von regulären Körpern auf Borel-Mengen verallgemeinert. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist es durch den Inhalt von halboffenen Quadern eindeutig festgelegt.

Satz 2.11 (Lebesgue-Maß). Es gibt genau ein Maß auf $\mathcal{B}^d$, genannt Lebesgue-Maß λ^d mit

$$\lambda^d([a, b)) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Beweis. Die Existenz eines solchen Maßes ist nichttrivial; wir werden die Frage am Ende der Vorlesung behandeln.

Für die Eindeutigkeit verwenden wir Satz 2.10: Nach Satz 1.20 (iii) ist $\mathcal{E} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}^d\}$ ein Erzeuger von $\mathbb{R}^d$ und schnittstabil (warum?). Weiter gilt für $E_n := [-n, n) \in \mathcal{E}$ offensichtlich $E_n \uparrow \mathbb{R}^d$ sowie $\lambda^d(E_n) = (2n)^d < \infty$. $\square$

Das Lebesgue-Maß kann auch wie folgt charakterisiert werden.

Satz 2.12. *Das Lebesgue-Maß ist das einzige Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit*

- (i) $\lambda^d(B) = \lambda^d(B + v)$ mit $B + v := \{x + v \mid x \in B\}$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$ und $v \in \mathbb{R}^d$ (Translationsinvarianz),
- (ii) $\lambda^d([0, 1)) = 1$ (Normiertheit).

Beweis. Die Normiertheit des Lebesgue-Maßes folgt aus der Definition; für die Translationsinvarianz betrachten wir das Bildmaß $\mu = \varphi(\lambda^d)$ für die stetige und damit messbare Funktion $\varphi(x) := x + v$. Dann ist nach Definition

$$\begin{aligned} \mu([a, b)) &= \lambda^d(\varphi^{-1}([a, b))) = \lambda^d([a - v, b - v)) \\ &= ((b_1 - v_1) - (a_1 - v_1)) \cdots ((b_d - v_d) - (a_d - v_d)) = \lambda^d([a, b)) \end{aligned}$$

Aus [Satz 2.11](#) folgt nun $\mu(B) = \lambda^d(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$.

Sei umgekehrt μ ein translationsinvariantes und normiertes Maß auf $\mathcal{B}^d$. Dann folgt

$$1 = \mu([0, 1)) = \sum_{k=1}^{n^d} \mu([0, \frac{1}{n})) = n^d \cdot \mu([0, \frac{1}{n})),$$

denn wir können den Einheitswürfel in n^d disjunkte kongruente Teilwürfel der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ zerlegen, die wegen der Translationsinvarianz das gleiche Maß haben. Daraus folgt $\mu([0, \frac{1}{n})) = n^{-d}$. Da dies für beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt, können wir mit endlich vielen solcher Teilwürfel jeden Quader $[a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$ disjunkt zusammensetzen. Aus der Additivität und Translationsinvarianz folgt dann

$$\mu([a, b)) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d), \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{Q}^d.$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, bilden diese Quader einen schnittstabilen Erzeuger von $\mathcal{B}^d$ (siehe den Beweis von [Satz 1.20](#)). Aus [Satz 2.10](#) folgt daher $\mu = \lambda^d$. $\square$

Für das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}$ lässt sich relativ einfach ein Beispiel einer Menge konstruieren, der man keinen sinnvollen Inhalt zuweisen kann.

Satz 2.13 (Vitali). *Sei $N \subset [0, 1]$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass für jede reelle Zahl a genau eine Zahl $b \in N$ existiert, so dass $a - b$ rational ist. Setze $N + r := \{x + r \mid x \in N\}$. Dann gilt*

- (i) $N + r$ und $N + r'$ sind disjunkt für alle rationale Zahlen $r \neq r'$,
- (ii) $[0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (N + r) \subset [-1, 2]$.

Beweis. Hausaufgabe. Die Menge N ist eine vollständige Menge von Repräsentanten für die Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$, deren Existenz aus dem Auswahlaxiom folgt. $\square$

Aus (ii) folgt sofort, dass N weder positives Lebesgue-Maß noch Lebesgue-Maß 0 haben kann, ohne Translationsinvarianz, σ -Additivität, oder Monotonie zu verletzen. Auf ähnliche Weise, aber mit deutlich mehr Aufwand, lassen sich statt dieser “paradoxen Überdeckung” auch “paradoxe Zerlegungen” wie das Banach–Tarski-Paradoxon im $\mathbb{R}^3$ konstruieren.

2.4 NULLMENGEN

Von besonderem Interesse in der Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie sind Mengen mit Maß 0, da sie für viele Zwecke “vernachlässigbar” sind.

Definition 2.14 (Nullmengen). Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $A \subset S$ heißt (μ) -Nullmenge, falls gilt $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = 0$.

Direkt aus der Definition erhalten wir die folgenden Eigenschaften von Nullmengen.

Folgerung 2.15. Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und bezeichne $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ das System aller μ -Nullmengen. Dann gilt

- (i) $\emptyset \in \mathcal{N}$, aber $S \notin \mathcal{N}$ außer $\mu = 0$,
- (ii) $A \in \mathcal{A}$ und $A \supset A' \in \mathcal{A}$ impliziert $A' \in \mathcal{N}$,
- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{N}$ impliziert $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{N}$.

Beispiel 2.16. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\{x\}$ eine Lebesgue-Nullmenge, denn $\{x\} = \bigcap_{n \geq 1} [x, \frac{1}{n}] \in \mathcal{B}$ ist messbar. Weiter folgt aus der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maß, dass $\lambda(\{x\}) = c$ für ein $c \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Aus der Normiertheit, Monotonie, und σ -Additivität folgt daher

$$1 = \lambda([0, 1)) \geq \lambda\left(\bigcup_{n \geq 2} \left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \sum_{n \geq 1} \lambda\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \sum_{n \geq 2} c,$$

was nur für $c = 0$ möglich ist. Damit sind auch alle höchstens abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ Lebesgue-Nullmengen.

Insbesondere sind Eigenschaften, die nur auf Nullmengen gelten, “vernachlässigbar”.

Definition 2.17 (fast überall). Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(S', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und $\varphi, \psi : S \rightarrow S'$ messbare Funktionen. Ist $\{\varphi \neq \psi\} \in \mathcal{A}$ eine μ -Nullmenge, so heißen φ und ψ (μ) -fast überall gleich, geschrieben $\varphi = \psi$ (μ) -fast überall oder $\varphi(x) = \psi(x)$ für

(μ) -fast alle $x \in S$.

Analog spricht man von $\varphi \leq \psi$ fast überall.

Beispiel 2.18. Die Funktion $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ist λ -fast überall stetig, aber nicht λ -fast überall gleich einer stetigen Funktion (**warum?**). Umgekehrt ist die *Dirichlet-Funktion* $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ fast überall gleich 0, aber nirgends stetig.

Allgemein sagt man: Erfüllt φ eine Eigenschaft auf dem Komplement einer Nullmenge, gilt diese Eigenschaft *fast überall*. In den folgenden Kapiteln werden wir das vor allem für die punktweise Konvergenz benötigen.

Definition 2.19 (Konvergenz fast überall). Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, (S', d) ein metrischer Raum, und $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n : S \rightarrow S'$ messbar. Gilt $\mu(\{x \in S \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi_n(x), \varphi(x)) \neq 0\}) = 0$, dann konvergiert φ_n gegen φ (μ) -fast überall, geschrieben $\varphi_n \rightarrow \varphi$ (μ) -fast überall.

Beispiel 2.20. Betrachte $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Dann konvergiert $\varphi_n \rightarrow 0$ λ -fast überall.

3 DAS LEBESGUE-INTEGRAL

Wir haben nun alles zur Hand, um den gesuchten allgemeineren Integralbegriff zu definieren, zunächst für nichtnegative messbare Funktionen. Die Grundidee ist einfach: für stückweise konstante reelle Funktionen ist das Riemann-Integral gleich der Summe der Rechtecksflächen (Konstante mal Intervalllänge); dank unserem allgemeineren Inhaltsbegriff können wir statt Intervallen beliebige (messbare) Urbilder zulassen und dann die Zylinderformel (Konstante mal Grundfläche, d. h. Maß des Urbilds) aufsummieren.

Definition 3.1 (einfache Funktion). Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ nichtnegativ. Dann heißt f *einfache Funktion*, falls f messbar ist und gilt

$$f = \sum_z z \cdot \mathbb{1}_{\{f=z\}},$$

wobei die Summe endlich ist.

Einer einfachen Funktion kann man nun einen kanonischen Integralwert zuweisen; die wesentliche Idee in der Konstruktion für allgemeine nichtnegative Funktionen ist, das Integral über das *Supremum* einfacher Funktionen (statt wie im Riemann-Integral als Grenzwert einer spezifischen Folge von Treppenfunktionen) zu definieren. Zusammen mit der monotonen Approximation und dem Monotonieprinzip aus [Kapitel 1](#) erlaubt dies, stärkere Aussagen zu gewinnen.

Definition 3.2 (Lebesgue-Integral). Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar. Dann heißt

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \sum_z z \cdot \mu(\{h = z\}) \mid h \text{ einfach mit } 0 \leq h \leq f \right\} \in [0, \infty]$$

Lebesgue-Integral von f bezüglich μ . Ist die Integrationsvariable nicht offensichtlich, schreiben wir $\int f(x) \, d\mu(x)$.

Beachte, dass das Supremum immer existiert (aber nicht endlich sein muss), da die konstante Funktion $h = 0$ immer zulässig ist.

Direkt aus der Definition erhält man nun wichtige Eigenschaften. In Folge sei stets $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 3.3 (Markov-Ungleichung). Sei $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und $z \geq 0$. Dann gilt

$$z \cdot \mu(\{f \geq z\}) \leq \int f d\mu.$$

Beweis. Für messbare nichtnegative f und alle $z \geq 0$ ist $h := z \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq z\}}$ einfach und erfüllt $0 \leq h \leq f$. $\square$

Daraus folgt insbesondere eine der fundamentalen Eigenschaften jedes Integrals: die Monotonie.

Satz 3.4. Seien $f, g : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar. Dann gilt

- (i) $f \leq g$ fast überall impliziert $\int f d\mu \leq \int g d\mu$,
- (ii) $f = g$ fast überall impliziert $\int f d\mu = \int g d\mu$,
- (iii) $\int f d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall,
- (iv) $\int f d\mu < \infty$ impliziert $f < \infty$ fast überall,

Beweis. (i): Für alle h einfach mit $0 \leq h \leq f$ ist auch $h' := h \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ einfach mit $0 \leq h' \leq g$. Also gilt (warum?)

$$\sum_z z \cdot \mu(\{h' = z\}) = \sum_z z \cdot \mu(\{h = z, f \leq g\}) = \sum_z z \cdot \mu(\{h = z\})$$

da nach Annahme $\{f > g\}$ eine Nullmenge ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \sup \left\{ \sum_z z \cdot \mu(\{h' = z\}) \mid h \text{ einfach mit } 0 \leq h \leq f \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_z z \cdot \mu(\{h' = z\}) \mid h' \text{ einfach mit } 0 \leq h' \leq g \right\} = \int g d\mu, \end{aligned}$$

da das letzte Supremum über alle einfachen $0 \leq h' \leq g$ anstatt nur die der Form $h' = h \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ genommen wird.

(ii): folgt sofort aus (i).

(iii): Die Richtung “ $\Rightarrow$ ” folgt aus (ii) und $\int 0 d\mu = 0$ (warum?). Umgekehrt folgt aus der Markov-Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{1}{n} \mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) \leq \int f d\mu = 0$$

und damit $\mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$. Weiter gilt $\{f \geq \frac{1}{n}\} \uparrow \{f > 0\}$ (**warum?**), so dass aus der σ -Stetigkeit von μ folgt $\mu(\{f > 0\}) = 0$, d. h. $f = 0$ fast überall.

(iv): Für alle $z > 0$ ist $0 \leq z \cdot \mathbb{1}_{\{f=\infty\}} \leq f$ einfach und daher

$$z \cdot \mu(\{f = \infty\}) \leq \int f d\mu < \infty.$$

Durch Grenzübergang $z \rightarrow \infty$ folgt daraus $\mu(\{f = \infty\}) = 0$. $\square$

Der folgende *Satz von Beppo Levi* ist der Fundamentalsatz der Lebesgue-Integration, der für monotone Funktionenfolgen das Vertauschen von punktweisem(!) Grenzwert und Integral erlaubt. (Zur Erinnerung: Für das Riemann-Integral gilt dies nur für *gleichmäßige* Konvergenz!)

Satz 3.5 (monotone Konvergenz). Seien $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ messbar und $f := \sup_{n \geq 1} f_n$. Dann gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Wegen $f \geq f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Monotonie des Integrals (**Satz 3.4** (i)) sofort $\int f d\mu \geq \int f_n d\mu$ und damit auch $\int f d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ (wobei die rechte Seite wegen der Monotonie nur endlich oder unbeschränkt sein kann, aber in jedem Fall existiert).

Für die umgekehrte Ungleichung sei h eine beliebige einfache Funktion mit $0 \leq h \leq f$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$h_n := (h - \varepsilon)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{f_n > h - \varepsilon\}}$$

ebenfalls eine einfache Funktion mit $0 \leq h_n \leq f_n$ (**warum?**). Nach Definition gilt dann

$$\sum_z (z - \varepsilon)^+ \cdot \mu(\{h = z, f_n > h - \varepsilon\}) \leq \int f_n d\mu.$$

Nach Definition von h und f gilt nun $\{f_n > h - \varepsilon\} \uparrow S$ (**warum?**), und daher folgt aus der σ -Stetigkeit $\mu(\{h = z, f_n > h - \varepsilon\}) \rightarrow \mu(\{h = z\})$. Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ gefolgt von $\varepsilon \rightarrow 0$ auf beiden Seiten liefert daher

$$\sum_z z \cdot \mu(\{h = z\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu,$$

sodass durch Supremum über alle einfachen Funktionen $0 \leq h \leq f$ die Behauptung folgt. $\square$

Wir werden diesen Satz insbesondere auf die monotone (und einfache!) Approximation aus [Lemma 1.30](#) anwenden, um wünschenswerte Eigenschaften von endlichen Summen auf Integrale zu übertragen.

Für nichtmonotone Funktionenfolgen erhalten wir immer noch eine “Unterhalbstetigkeit” des Lebesgue-Integrals.

Satz 3.6 (Lemma von Fatou). Seien $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ messbar und $f \geq 0$ messbar mit $f \leq \liminf_{n \geq 1} f_n$ fast überall. Dann gilt

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Setze $g_n := \inf_{m \geq n} f_m \geq f_n$. Dann gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ sowie $\sup_{n \geq 1} g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$. Wir können also [Satz 3.5](#) anwenden und erhalten

$$\int f \, d\mu \leq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} g_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu,$$

wobei wir im ersten und im letzten Schritt die Monotonie des Integrals verwendet haben. $\square$

Eine bessere Aussage können wir im Allgemeinen nicht erwarten.

Beispiel 3.7. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n := n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$ eine einfache Funktion und konvergiert fast überall gegen 0, während

$$\int f_n \, d\lambda \geq n\lambda([0, \frac{1}{n}]) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Tatsächlich gilt hier die Ungleichung mit Gleichheit, denn für einfache Funktionen wird das Supremum in der Definition für f selber angenommen. (Dies ist eine nichttriviale Aussage, denn $\{f = z\}$ geht nur bis auf Nullmengen in die Berechnung ein.) Dies kann auf Funktionen mit abzählbar vielen Werten verallgemeinert werden.

Satz 3.8. Sei $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar. Nimmt f höchstens abzählbar viele Werte an, dann gilt

$$\int f \, d\mu = \sum_y y \cdot \mu(\{f = y\}),$$

wobei die Summe über alle Werte von f geht.

Beweis. Wieder folgt aus der Nichtnegativität von f , dass die Summe bzw. Reihe auf der rechten Seite wohldefiniert und unabhängig von der Reihenfolge (endlich oder unendlich) ist.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass f nur endlich viele Werte annimmt (d. h. einfach ist). Sei dafür h eine einfache Funktion mit $0 \leq h \leq f$. Dann gilt

$$\mu(\{f = y, h = z\}) = \mu(\emptyset) = 0 \quad \text{für alle } z > y,$$

und damit durch Aufspalten mit Hilfe der σ -Additivität (**warum?**) und Umsortieren der (endlichen!) Summen

$$\begin{aligned} \sum_z z \cdot \mu(\{h = z\}) &= \sum_z \sum_y z \cdot \mu(\{h = z, f = y\}) \\ &\leq \sum_y \sum_z y \cdot \mu(\{h = z, f = y\}) = \sum_y z \cdot \mu(\{f = y\}), \end{aligned}$$

da alle Summanden für $z > y$ verschwinden. Supremum über alle h ergibt dann die Behauptung, da die andere Ungleichung direkt aus der Definition für die zulässige einfache Funktion $h = f$ folgt.

Sei nun angenommen, f nimmt eine unendliche Folge von Werten $y_1, y_2, \dots$ an, und sei $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \dots$ eine divergente Folge mit $z_i \neq y_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Setze nun

$$f_n := \sum_{k=1}^n y_k \cdot \mathbb{1}_{\{f=y_k\}} + z_k \cdot \mathbb{1}_{\{f=\infty\}}.$$

Dann sind alle f_n einfach und erfüllen (genau wie in [Lemma 1.30](#)) $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ sowie $\sup_{n \geq 1} f_n = f$. Anwenden von Fall 1, Grenzübergang $n \rightarrow \infty$, und der Satz über die monotone Konvergenz ([Satz 3.5](#)) ergibt nun die Behauptung. $\square$

Der folgende Spezialfall ist besonders in der Wahrscheinlichkeitstheorie sehr nützlich.

Folgerung 3.9. Sei $A \subset S$ messbar. Dann gilt

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A d\mu.$$

Damit können wir nun die zweite fundamentale Eigenschaft jedes Integrals zeigen: die Linearität.

Satz 3.10 (Linearität). Seien $f, g : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und $\alpha, \beta \geq 0$. Dann gilt

$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass f und g höchstens abzählbar viele Werte u bzw. v annehmen. Dann nimmt auch $\alpha f + \beta g$ höchstens abzählbar viele Werte y an. Wieder können wir wegen der Nichtnegativität der Summanden und der σ -Additivität von μ die Reihen aufspalten und umsortieren und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_y y \cdot \mu(\{\alpha f + \beta g = y\}) &= \sum_u \sum_v (\alpha u + \beta v) \cdot \mu(\{f = u, g = v\}) \\ &= \alpha \sum_u u \cdot \sum_v \mu(\{f = u, g = v\}) + \beta \sum_v v \cdot \sum_u \mu(\{f = u, g = v\}) \\ &= \alpha \sum_u u \cdot \mu(\{f = u\}) + \beta \sum_v v \cdot \mu(\{g = v\}). \end{aligned}$$

Anwenden von [Satz 3.8](#) auf beide Seiten ergibt nun die Behauptung.

Für den allgemeinen Fall verwenden wir [Lemma 1.30](#) um für f und g Folgen monotoner Approximationen f_n, g_n zu erhalten, für die aus dem ersten Fall gilt

$$\int \alpha f_n + \beta g_n d\mu = \alpha \int f_n d\mu + \beta \int g_n d\mu.$$

Dann ist auch $\alpha f_n + \beta g_n$ eine monotone Approximation von $\alpha f + \beta g$ (*warum?*), so dass wir auf beide Seiten den Satz über monotone Konvergenz anwenden können. $\square$

Durch wiederholtes Anwenden der Linearität gefolgt von [Satz 3.5](#) erhalten wir daraus sofort

Folgerung 3.11. Seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar. Dann gilt

$$\int \sum_{n \geq 1} f_n d\mu = \sum_{n \geq 1} \int f_n d\mu.$$

Eine weitere nützliche Linearitätseigenschaft von Integralen erlaubt es, die Integrationsgebiete aufzuspalten.

Definition 3.12. Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann setze für $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar

$$\int_A f d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A d\mu.$$

(Da A messbar ist, ist $f \cdot \mathbb{1}_A$ nach [Lemma 1.24](#) (ii) ebenfalls messbar und nichtnegativ.)

Folgerung 3.13. Seien $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und $A, B \subset S$ messbar und disjunkt. Dann gilt

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

Beweis. Da A und B disjunkt sind, folgt aus [Satz 3.10](#) sofort

$$\begin{aligned} \int_{A \cup B} f \, d\mu &= \int f \cdot \mathbb{1}_{A \cup B} \, d\mu = \int f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \, d\mu \\ &= \int f \mathbb{1}_A \, d\mu + \int f \mathbb{1}_B \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

Wir illustrieren die für die Integrationstheorie fundamentale Beweismethode der monotonen Approximation und Konvergenz an zwei weiteren Beispielen, zuerst der folgenden “Baumkuchenformel”, die manchmal für die Berechnung von Lebesgue-Integralen nützlich ist.

Satz 3.14. Sei $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = \int_{[0, \infty)} \mu(\{f > t\}) \, d\lambda(t).$$

Beweis. Diesmal verwenden wir die modifizierte monotone Approximation

$$f_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{\{k2^{-n} < f \leq (k+1)2^{-n}\}} + \infty \cdot \mathbb{1}_{\{f = \infty\}} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{f > k2^{-n}\}}$$

(warum?). Aus [Folgerung 3.11](#) und [Satz 3.8](#) folgt dann

$$\int f_n \, d\mu = 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{f > k2^{-n}\}) = \int_{[0, \infty)} \mu(\{f > \lceil t2^n \rceil 2^{-n}\}) \, d\lambda(t),$$

(warum?). Wir betrachten nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten. Für die linke Seite können wir wegen der monotonen Approximation [Satz 3.5](#) anwenden. Für die rechte Seite verwenden wir, dass $\lceil t2^n \rceil 2^{-n}$ für alle $t \geq 0$ eine monoton fallende Nullfolge bildet und daher $\{f > \lceil t2^n \rceil 2^{-n}\} \uparrow \{f > t\}$ gilt. Aus der σ -Stetigkeit von μ folgt die (monotone) Konvergenz $\mu(\{f > \lceil t2^n \rceil 2^{-n}\}) \rightarrow \mu(\{f > t\})$, so dass wir auch auf die rechte Seite [Satz 3.5](#) anwenden können und die Behauptung erhalten. $\square$

Oft wird diese Methode wie im folgenden Beispiel in Form des Monotonieprinzips ([Satz 1.31](#)) angewendet.

Satz 3.15 (Transformationsformel). Sei $(S', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und sei μ' das Bildmaß von μ unter $\varphi : S \rightarrow S'$. Dann gilt für jede messbare Funktion $f : S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\int f \, d\mu' = \int f \circ \varphi \, d\mu.$$

Beweis. Die Menge

$$\mathcal{K} := \left\{ f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid f \text{ messbar mit } \int f \, d\mu' = \int f \circ \varphi \, d\mu \right\}.$$

erfüllt alle Voraussetzungen von [Satz 1.31](#): (ii) (Abgeschlossenheit bezüglich Linearkombinationen) und (iii) (Abgeschlossenheit bezüglich monotoner Konvergenz) folgen direkt aus [Sätze 3.5](#) und [3.10](#), und (i) folgt aus

$$\int \mathbb{1}_A \, d\mu' = \mu'(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)) = \mu(\{x \in S \mid \varphi(x) \in A\}) = \int \mathbb{1}_A \circ \varphi(x) \, d\mu.$$

Also gilt die Behauptung für alle nichtnegativen messbaren Funktionen. $\square$

4 INTEGRIERBARE FUNKTIONEN

Für $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar aber nicht unbedingt nichtnegativ betrachten wir einfach wir einfach Positivteil f^+ und Negativteil f^- separat, die nach [Folgerung 1.25](#) messbar und offensichtlich nichtnegativ sind und $f = f^+ - f^-$ erfüllen. Die einzige Schwierigkeit ist hier, die unzulässige Rechnung $\infty - \infty$ auszuschliessen.

Definition 4.1. Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Ist entweder $\int f^+ d\mu < \infty$ oder $\int f^- d\mu < \infty$, dann heißt

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

das *Lebesgue-Integral* von f bezüglich μ . Analog ist $\int_A f d\mu$ für $A \in \mathcal{A}$ definiert. Gilt $\int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$, dann heißt f (μ -)integrierbar; in diesem Fall ist $\int f d\mu \in \mathbb{R}$.

Aus [Satz 3.4](#) (iv) folgt, dass eine integrierbare Funktion zwangsläufig fast überall endlich ist. Wir schränken uns daher in Folge ohne großen Verlust auf reellwertige Funktionen ein. Weiter folgt aus [Folgerung 1.25](#) (iii) und [Satz 3.10](#)

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Wir erhalten daraus das folgende Integrabilitätskriterium.

Satz 4.2. Sei $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist f genau dann μ -integrierbar, wenn gilt $\int |f| d\mu < \infty$. In diesem Fall ist

$$(4.1) \quad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Für integrierbare Funktionen folgen die fundamentalen Eigenschaften des Lebesgue-Integrals aus den entsprechenden Resultaten für nichtnegative Funktionen.

Satz 4.3 (Monotonie). Seien $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f \leq g$ fast überall, dann ist $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Beweis. Nach Annahme gilt $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$ und daher $0 \leq f^+ + g^- \leq f^- + g^+$ fast überall. Aus Satz 3.4 (i) und Satz 3.10 folgt daher

$$\int f^+ d\mu + \int g^- d\mu \leq \int g^+ d\mu + \int f^- d\mu.$$

Da nach Voraussetzung alle Integrale endlich sind, können wir die Ungleichung umstellen und erhalten die Behauptung. $\square$

Für das nächste Resultat beachte, dass wir zuerst die Integrierbarkeit zeigen müssen und erst dann (durch eine ähnliche Rechnung) die behauptete Gleichheit.

Satz 4.4 (Linearität). Seien $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Additivität. Aus Satz 3.4 (i) und Satz 3.10 folgt wieder

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| + |g| d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < \infty$$

nach Voraussetzung. Also ist auch $f + g$ integrierbar. Weiter gilt

$$f + g = (f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

und daher

$$0 \leq (f + g)^+ + f^- g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Wir können daher auf beide Seiten Satz 3.10 anwenden und erhalten, weil alle Integrale nach Annahme endlich sind, durch Umstellen die Behauptung.

Analog zeigt man, dass $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ gilt (warum?). $\square$

Für den Fundamentalsatz über die Vertauschbarkeit von punktweiser Konvergenz und Integral – auch *Konvergenzsatz von Lebesgue* genannt – benötigen wir eine Zusatzvoraussetzung, die die Integrierbarkeit des Grenzwerts garantiert.

Satz 4.5 (dominierte Konvergenz). Sei $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $f_n \rightarrow f$ fast überall. Existiert eine integrierbare Majorante $g : S \rightarrow [0, \infty)$, d. h. $\int g d\mu < \infty$ und $g \geq |f_n|$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind alle f_n und f integrierbar und es gilt

$$(i) \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0,$$

$$(ii) \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Beweis. Wegen $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow f$ und daher fast überall gilt auch $|f| \leq g$ fast überall (denn die abzählbare Vereinigung aller auftretenden Nullmengen ist wieder eine Nullmenge). Aus der Integrierbarkeit von g zusammen mit [Satz 3.4](#) (i) folgt daher die Integrierbarkeit von f_n und von f .

Weiter gilt nach Annahme

$$0 \leq 2g - |f_n - f| \rightarrow 2g \quad \text{fast überall,}$$

wir können also das Lemma von Fatou ([Satz 3.6](#)) anwenden und erhalten

$$\int 2g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (2g - |f_n - f|) d\mu = \int 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu.$$

Da $\int 2g d\mu$ nach Annahme endlich ist, folgt

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu \leq 0$$

und damit (i).

Die Behauptung (ii) folgt daraus zusammen mit [\(4.1\)](#) und der Linearität:

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int f_n - f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0. \quad \square$$

Wir zeigen nun drei Ungleichungen, die in der Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie oft verwendet werden.

Satz 4.6 (Hölder-Ungleichung). Seien $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Gilt $\int |f|^p d\mu < \infty$ und $\int |g|^q d\mu < \infty$, dann ist $f \cdot g$ integrierbar und es gilt

$$\left| \int f \cdot g d\mu \right| \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Ist $\int |f|^p d\mu = 0$, so folgt aus [Satz 3.4](#) (iii), dass fast überall gilt $|f|^p = 0$ und daher $f = 0$ sowie $f \cdot g = 0$; das gleiche folgt analog aus $\int |g|^q d\mu = 0$. In beiden Fällen gilt die Behauptung also trivialerweise.

Wir können also annehmen, dass $\int |f|^p d\mu, \int |g|^q d\mu > 0$ gilt. Seien nun $a, b > 0$ beliebig. Dann folgt aus der Konkavität des Logarithmus die Ungleichung

$$\log(ab) = \log a + \log b = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q) \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$$

wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten ergibt dann die Young-Ungleichung

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,$$

die auch für $a = 0$ oder $b = 0$ (trivialerweise) erfüllt ist. Setze nun $\alpha := (\int |f|^p d\mu)^{1/p} > 0$ und $\beta := (\int |g|^q d\mu)^{1/q} > 0$ und wende punktweise die Young-Ungleichung an auf

$$\frac{|f|}{\alpha} \cdot \frac{|g|}{\beta} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\beta^q}.$$

Aus (4.1) sowie der Monotonie und Linearität des Integrals folgt daraus

$$\frac{1}{\alpha\beta} \left| \int f \cdot g d\mu \right| \leq \frac{1}{\alpha\beta} \int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

was nach Definition von α, β äquivalent ist zur Behauptung. $\square$

Satz 4.7 (Minkowski-Ungleichung). Seien $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und $1 \leq p < \infty$. Dann gilt

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Behauptung direkt aus der Dreiecksungleichung sowie der Monotonie und Linearität des Integrals. Sei daher $1 < p < \infty$. Dann können wir schreiben

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu = \int |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int |g||f + g|^{p-1} d\mu,$$

und Anwenden der Hölder-Ungleichung für $q := p(p-1) > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ergibt

$$\int |f + g|^p d\mu \leq \left[\left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dividieren durch den letzten Term und Verwenden von $(p-1)q = p$ und $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ ergibt die Behauptung. $\square$

Die folgende Verallgemeinerung von (4.1) ist vor allem in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung.

Satz 4.8 (Jensen-Ungleichung). Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann existiert das (nicht notwendigerweise endliche) Lebesgue-Integral von $\varphi \circ f$ und es gilt

$$\varphi \left(\int f d\mu \right) \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir verwenden (ohne Beweis) die Tatsache, dass wegen der Konvexität von φ ein $\xi = \xi(a) \in \mathbb{R}$ existiert¹ mit

$$(4.2) \quad \varphi(x) \geq \varphi(a) + \xi \cdot (x - a) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\varphi \circ f \geq \varphi(a) + \xi \cdot (f - a).$$

Also gilt auch $(\varphi \circ f)^- \leq (\varphi(a) + \xi \cdot (f - a))^- < \infty$ fast überall, da f integrierbar und deshalb wegen Satz 3.4 (iv) fast überall $f^- < \infty$ ist. Daher ist auch $\int (\varphi \circ f)^- d\mu < \infty$, und somit existiert das Lebesgue-Integral von $\varphi \circ f$.

Ist nun $\int (\varphi \circ f)^+ d\mu = \infty$, so gilt die Ungleichung trivialerweise. Andernfalls ist $\varphi \circ f$ integrierbar, und aus (4.2) zusammen mit Satz 4.3 und Satz 4.4 folgt

$$\int \varphi \circ f d\mu \leq \varphi(a) \int \mathbb{1}_S d\mu + \xi \cdot \left(\int f d\mu - a \right).$$

Mit der Wahl $a = \int f d\mu$ folgt daraus wegen $\mu(S) = 1$ die Behauptung. $\square$

Zum Abschluss untersuchen wir noch den Zusammenhang zwischen Lebesgue- und Riemann-Integral. Das folgende Resultat zeigt, dass ersteres tatsächlich eine Verallgemeinerung des letzteren ist.

Satz 4.9. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und setze

$$C := \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist stetig in } x\}, \quad D := \{x \in [a, b] \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}.$$

Dann gilt

- (i) C, D sind Borel-Mengen und $f \cdot \mathbb{1}_C$ ist Borel-messbar.
- (ii) f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn D eine Lebesgue-Nullmenge ist; in diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int f \cdot \mathbb{1}_C d\lambda.$$

¹Ist φ stetig differenzierbar, erhält man die Existenz von $\xi := \varphi'(a)$ aus dem Mittelwertsatz; für nicht differenzierbare Funktionen ist ξ nicht mehr eindeutig, und man braucht deutlich aufwändigere Resultate aus der konvexen Analysis.

Beweis. Zu (i): Sei $P_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Partition mit Feinheit $w(P_n) := \max_j (x_j - x_{j-1})$. Setze für $k = 1, \dots, n$

$$i_k := \inf \{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \quad s_k := \sup \{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\},$$

sowie

$$g_n := \sum_{k=1}^n i_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k]}, \quad h_n := \sum_{k=1}^n s_k \mathbb{1}_{(x_{k-1}, x_k]}.$$

Dann gilt für die zu der Partition gehörende Unter- und Obersumme von f

$$U_n := \sum_{k=1}^n i_k (x_k - x_{k-1}) = \int g_n d\lambda, \\ O_n := \sum_{k=1}^n s_k (x_k - x_{k-1}) = \int h_n d\lambda.$$

Sei nun $P_1, P_2, \dots$ eine Folge von Partitionen mit $w(P_n) \rightarrow 0$ so, dass $P_{n+1} \supset P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist (warum?)

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq h_2 \leq h_1.$$

Da g_n, h_n messbar sind, sind auch $g := \sup_{n \geq 1} g_n$ und $h := \sup_{n \geq 1} h_n$ messbar und erfüllen $g \leq f \leq h$. Wegen $w(P_n) \rightarrow 0$ muss dann gelten

$$(4.3) \quad \{g < h\} \subset D \subset \{g < h\} \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} P_n \right).$$

Da alle P_n Lebesgue-Nullmengen sind und die Vereinigung abzählbar ist, folgt die Borel-Messbarkeit von D (dies ist nicht trivial und benötigt Resultate über die *Regularität* des Lebesgue-Maßes, die den Rahmen der Vorlesung sprengen). Aus der Monotonie von Maßen erhalten wir dann

$$\lambda(\{g < h\}) \leq \lambda(D) \leq \lambda(\{g < h\}) + 0$$

und damit Gleichheit. Damit ist auch $C = [a, b] \setminus D$ und daher $\mathbb{1}_C$ Borel-messbar. Weiter folgt wegen $g \leq f \leq h$ aus (4.3), dass $g = h = f$ auf C und damit $f \cdot \mathbb{1}_C = g \cdot \mathbb{1}_C$ gelten muss. Also ist auch $f \cdot \mathbb{1}_C$ Borel-messbar.

Zu (ii): Da f beschränkt ist, gilt dies auch für g_n und h_n . Weiter ist $[a, b]$ beschränkt, so dass die Schranken eine integrierbare Majorante liefern (warum?). Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz (Satz 4.5) gilt also

$$\int g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n, \quad \int h d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n.$$

Also ist $g = h$ fast überall genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ ist – was nach Definition genau dann der Fall ist, wenn f Riemann-integrierbar ist. Also ist wegen $g \leq h$

zusammen mit (4.3) D eine Lebesgue-Nullmenge genau dann, wenn f Riemann-Integrierbar ist. In diesem Fall gilt fast überall $g = g \cdot \mathbb{1}_C = f \cdot \mathbb{1}_C$ und

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \int g d\lambda = \int f \cdot \mathbb{1}_C d\lambda$$

und damit die Behauptung. □

5 KONVERGENZ UND VOLLSTÄNDIGKEIT

Wir haben bisher Konvergenzresultate für die punktweise Konvergenz (fast überall) untersucht. Dieser Konvergenzbegriff ist aber für viele Zwecke nicht ausreichend, da er zum Beispiel kein Teilfolgen-Teilfolgen-Prinzip ("wenn jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge mit dem selben Grenzwert besitzt, konvergiert die gesamte Folge gegen diesen") erlaubt. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass wir keinerlei Zusammenhang zwischen Teilfolgen in unterschiedlichen Punkten herstellen können. In diesem Kapitel betrachten wir daher zwei in der Anwendung wichtige Konvergenzbegriffe, die diesen Mangel beheben. Wieder sei im Folgenden $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum.

5.1 KONVERGENZ IM MITTEL

Der erste (stärkere) Konvergenzbegriff ist für die Analysis fundamental.

Definition 5.1. Setze für $1 \leq p < \infty$ und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$(5.1) \quad N_p(f) := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

sowie

$$N_\infty(f) := \inf \{c > 0 \mid |f| \leq c \text{ } \mu\text{-fast überall}\}$$

(das (μ) -essentielle Supremum von f).

Gilt für $f_1, f_2, \dots$ und f messbar mit $N_p(f_n), N_p(f) < \infty$

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_p(f_n - f) = 0,$$

dann konvergiert f_n gegen f im p -ten Mittel, geschrieben $f_n \xrightarrow{p} f$. Analog nennen wir f_n Cauchy-Folge im p -ten Mittel, wenn $\lim_{m,n \rightarrow \infty} N(f_n - f_m) = 0$.

Ziel ist nun zu zeigen, dass diese Konvergenz *vollständig* ist, d. h. dass jede Cauchy-Folge im p -ten Mittel konvergiert. Dabei gehen wir wie folgt vor:

1. Die “globale” Cauchy-Eigenschaft impliziert – notfalls durch Übergang zu einer Teilfolge – die Cauchy-Eigenschaft fast überall.
2. Dank der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergiert diese Teilfolge punktweise fast überall; das liefert uns einen Kandidaten für den Grenzwert.
3. Die “globale” Cauchy-Eigenschaft garantiert, dass die gesamte Folge “global” gegen diesen Grenzwert konvergiert.

Für die spätere Wiederverwertung lagern wir das zentrale Argument in Schritt 1 in ein Lemma aus.

Lemma 5.2. Seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Dann existiert $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und eine Teilfolge mit $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall.

Beweis. Nach Voraussetzung existieren $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ so, dass für alle $m > n_k, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(\{|f_m - f_{n_k}| > 2^{-k}\}) \leq 2^{-k}$$

und daher insbesondere

$$\mu(\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\}) \leq 2^{-k}.$$

Setze nun

$$g := \sum_{k \geq 1} \mathbb{1}_{\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\}}.$$

Dann ist g messbar und erfüllt

$$\int g \, d\mu = \sum_{k \geq 1} \mu(\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\}) \leq \sum_{k \geq 1} 2^{-k} < \infty.$$

Nach Satz 3.4 (iv) ist dann $g < \infty$ fast überall, was nur möglich ist wenn gilt

$$\mu(\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k} \text{ für unendlich viele } k\}) = 0.$$

Also konvergiert auch die Reihe $\tilde{f} := \sum_{k \geq 1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ fast überall (sonst setzen wir $\tilde{f} = 0$). Mit Hilfe der Teleskopsumme folgt daraus

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \rightarrow f_{n_1} + \tilde{f}$$

fast überall, und damit die Behauptung. $\square$

Beachte, dass der Grenzwert (durch die Definition von $\tilde{f}$) von der betrachteten Teilfolge abhängt. Trotzdem genügt dies, um die Vollständigkeit zu zeigen.

Satz 5.3 (Riesz–Fischer). Sei $1 \leq p \leq \infty$ und seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge im p -ten Mittel. Dann existiert ein $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $N_p(f) < \infty$ und $f_n \xrightarrow{p} f$.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $1 \leq p < \infty$. Dann folgt für alle $\varepsilon > 0$ aus der Markov-Ungleichung

$$\mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) = \mu(\{|f_n - f_m|^p > \varepsilon^p\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f_m|^p d\mu \rightarrow 0,$$

Nach Lemma 5.2 existiert also eine messbare Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Teilfolge mit $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall. Weiter folgt aus dem Lemma von Fatou (Satz 3.6) für alle $m \geq 1$

$$\int |f_m - f|^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int |f_m - f_{n_k}|^p d\mu \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_m - f_{n_k}|^p d\mu \leq \sup_{n \geq 1} \int |f_m - f_n|^p d\mu.$$

Aus der Cauchy-Eigenschaft folgt nun

$$\int |f_m - f|^p \leq \sup_{n \geq 1} \int |f_m - f_n|^p d\mu \rightarrow 0$$

für $m \rightarrow \infty$ und damit $N_p(f_n - f) \rightarrow 0$. Weiter folgt zusammen mit der elementaren Ungleichung $(a + b)^p \leq 2^p \max\{a^p, b^p\} \leq 2^p(a^p + b^p)$ für alle $a, b \geq 0$

$$\int |f|^p d\mu \leq 2^p \int |f_m|^p d\mu + 2^p \int |f - f_m|^p d\mu < \infty,$$

da $N_p(f_m) < \infty$ nach Voraussetzung und $\int |f - f_m|^p d\mu \rightarrow 0$.

Für den Fall $p = \infty$ argumentiert man analog; hier impliziert $N_\infty(f_m - f_n) \rightarrow 0$ nach Definition die gleichmäßige Cauchy-Eigenschaft außerhalb einer Nullmenge. Also konvergiert außerhalb dieser Nullmenge f_n gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion f , woraus die Behauptung folgt. (Hausaufgabe.) $\square$

Da umgekehrt jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, erhalten wir aus dem ersten Teil des Beweises die nützliche

Folgerung 5.4. Gilt $f_n \xrightarrow{p} f$, so existiert eine Teilfolge mit $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall.

Für die gesamte Folge gilt dies im Allgemeinen nicht; siehe Beispiel 5.10 weiter unten.

Beachte wieder, dass der Grenzwert f durch Lemma 5.2 nur fast überall festgelegt ist. Dies ist natürlich unbefriedigend.

5.2 L^p -RÄUME

Aus dem bereits gezeigten folgt, dass N_p eine *Halbnorm* ist auf

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid N_p(f) < \infty\}.$$

Es gilt nämlich:

- (i) $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$ (**warum?**);
- (ii) $N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$ wegen der Minkowski-Ungleichung für $p < \infty$ und den Supremumseigenschaften für $p = \infty$ (**warum?**);
- (iii) $N_p(0) = 0$.

Allerdings folgt aus $N_p(f) = 0$ nur $f = 0$ fast überall, so dass $\mathcal{L}^p(\mu)$ zwar ein Vektorraum, aber kein normierter Vektorraum ist.

Dieses Manko lässt sich beheben, in dem man Nullmengen “ignoriert”: Zwei Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, behandeln wir als gleich. Formal bedeutet das, dass wir statt Funktionen ihre Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation “Gleichheit fast überall” betrachten. Wir setzen

$$[f] := \{g \mid f = g \text{ fast überall}\}$$

sowie

$$L^p(\mu) := \{[f] \mid N_p(f) < \infty\}$$

versehen mit den Operationen

$$\alpha[f] + \beta[g] = [\alpha f] + [\beta g], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

und der Norm

$$\|[f]\|_p := N_p(f).$$

Beachte, dass alle diese Definitionen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind (**warum?**). Für $[f] \in L^p(\mu)$ gilt dann, dass aus $\|[f]\|_p = 0$ folgt $[f] = 0$. Wir haben also gezeigt

Satz 5.5. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\mu)$ ein normierter Vektorraum, der vollständig ist bezüglich der Konvergenz in der Norm.

Der Spezialfall $p = 2$ ist sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle [f], [g] \rangle = \int f \cdot g \, d\mu,$$

da in diesem Fall die Hölder-Ungleichung zur Cauchy–Schwarz-Ungleichung wird.

In den meisten Fällen wird man nicht zwischen Funktionen und Äquivalenzklassen unterscheiden; man spricht von “Funktionen” $f \in L^p(\mu)$ mit Norm $\|f\|_p = N_p(f)$. Der Preis dafür ist, dass solche “Funktionen” keinen wohldefinierten “Funktionswert” $f(x)$ für festes $x \in S$ besitzen; dies führt aber im Allgemeinen nicht zu Problemen. (Eine Ausnahme ist, wenn $[f]$ einen *stetigen* Repräsentanten – der dann eindeutig ist (**warum?**) – besitzt; in diesem Fall ist dies der kanonische Repräsentant, mit dem $[f]$ identifiziert wird.)

5.3 KONVERGENZ IM MASS

Lemma 5.2 definiert einen weiteren Konvergenzbegriff, der in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung ist.

Definition 5.6 (Konvergenz im Maß). Gilt für $f_1, f_2, \dots$ und f messbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

dann konvergiert f_n gegen f im Maß, geschrieben $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Analog definiert man *Cauchy-Folgen im Maß* durch (5.2).

In der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man auch von [Konvergenz!stochastische]stochastischer Konvergenz.

Wieder ist der Grenzwert eindeutig fast überall: Gilt $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} \tilde{f}$, so folgt aus der Dreiecksungleichung (**warum?**)

$$\mu(\{|f - \tilde{f}| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{|f_n - f| > \frac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{|f_n - \tilde{f}| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \rightarrow 0$$

und damit wegen der σ -Stetigkeit für $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mu(\{|f - \tilde{f}| > 0\}) = 0.$$

Auch diese Konvergenz ist vollständig.

Satz 5.7. Seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Dann existiert $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Beweis. Nach **Lemma 5.2** existiert $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und eine Teilfolge mit $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall. Daraus folgt für alle $\varepsilon > 0$ und $m \geq 1$

$$\mathbb{1}_{\{|f_m - f| > \varepsilon\}} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|f_m - f_{n_k}| > \varepsilon\}}$$

fast überall (warum?). Wir können daher das Lemma von Fatou (Satz 3.6) anwenden und erhalten für $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\begin{aligned} \mu(\{|f_m - f| > \varepsilon\}) &= \int \mathbb{1}_{\{|f_m - f| > \varepsilon\}} d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{\{|f_m - f_{n_k}| > \varepsilon\}} d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(\{|f_m - f_{n_k}| > \varepsilon\}) \\ &\leq \sup_{n \geq m} \mu(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $m \rightarrow \infty$. □

Hier gilt nun ein Teilfolgen-Teilfolgen-Prinzip.

Satz 5.8. Seien $f_1, f_2, \dots : S \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Für die Aussagen

(i) $f_n \xrightarrow{\mu} f$,

(ii) jede Teilfolge von $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enthält eine Teilfolge, die fast überall gegen f konvergiert
gilt dann (i) $\Rightarrow$ (ii). Ist μ endlich, so gilt auch (ii) $\Rightarrow$ (i).

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\{f_n\}_{n \in N}$, $N \subset \mathbb{N}$ unendlich, eine beliebige Teilfolge. Wie im Beweis von Lemma 5.2 finden wir dann wegen $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ eine Folge $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$, $n_k \in N$, mit

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > 2^{-k}\}) \leq 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

woraus für

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|f_{n_k} - f| > 2^{-k}\}}$$

folgt $\int g d\mu < \infty$ und damit $g < \infty$ fast überall. Das bedeutet wieder

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > 2^{-k} \text{ für unendlich viele } k\}) = 0$$

und daher $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei nun $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teil-Folge mit $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall. Dann folgt für alle $\varepsilon > 0$, dass $\mathbb{1}_{\{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\}} \rightarrow 0$ fast überall konvergiert. Nach Annahme ist $\int \mathbb{1}_S d\mu = \mu(S) < \infty$ eine integrierbare Majorante; aus dem Satz über die dominierte Konvergenz (Satz 4.5) folgt daher

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\}) = \int \mathbb{1}_{\{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\}} d\mu \rightarrow 0.$$

Also enthält jede Teilfolge der reellen Folge $\{\mu(\{|f_{n_k} - f| > \varepsilon\})\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen Null konvergente Teilfolge, so dass die gesamte Folge gegen Null konvergiert. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Insbesondere gilt

Folgerung 5.9. *Ist μ endlich, so ist jede fast überall konvergente Folge auch im Maß konvergent.*

Die Umkehrung gilt dagegen nicht.

Beispiel 5.10. Sei $S = [0, 1)$ und setze $f_n := \mathbb{1}_{[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m})}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq m$ mit $n = k + \frac{1}{2}m(m-1)$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ (und sogar $f_n \xrightarrow{p} 0$ für $1 \leq p < \infty$) (warum?), aber $f_n \rightarrow 0$ nirgendwo auf $[0, 1)$.

Zum Abschluss betrachten wir den Zusammenhang zwischen den beiden eingeführten Konvergenzbegriffen.

Satz 5.11. *Seien $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann sind äquivalent*

$$(i) \quad f_n \xrightarrow{p} f$$

$$(ii) \quad f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ und } \int |f_n|^p d\mu \rightarrow \int |f|^p d\mu < \infty.$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wie im Beweis von Satz 5.3 folgt aus $f_n \rightarrow p$ mit Hilfe der Markov-Ungleichung

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

und damit $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, sowie aus der (umgekehrten) Minkowski-Ungleichung

$$|N_p(f_n) - N_p(f)| \leq N_p(f_n - f) \rightarrow 0$$

und damit $\int |f_n|^p d\mu \rightarrow \int |f|^p d\mu < \infty$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Nach Satz 5.8 existiert eine Teil-Folgerfolge $f_{n_k} \rightarrow f$ fast überall. Es gilt also

$$0 \leq 2^p(|f|^p + |f_{n_k}|^p) - |f_{n_k} - f|^p \rightarrow 2^{p+1}|f|^p$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt daher

$$2^{p+1} \int |f|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(2^p \int |f|^p d\mu + 2^p \int |f_{n_k}|^p d\mu - \int |f_{n_k} - f|^p d\mu \right).$$

Nach Annahme gilt nun $\int |f_n|^p d\mu \rightarrow \int |f|^p d\mu < \infty$; wir können daher auf beiden Seiten $\int |f|^p d\mu$ subtrahieren und erhalten

$$0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_{n_k} - f|^p d\mu \leq 0.$$

Also gilt $N_p(f_{n_k} - f) \rightarrow 0$. Wieder ist dies eine reelle Folge mit von der Teilfolge unabhängigen Grenzwert, so dass $N_p(f_n - f) \rightarrow 0$ für die gesamte Folge gilt. $\square$

6 DICHTEN UND ABSOLUTSTETIGKEIT

Wir beginnen jetzt damit, unsere Aufmerksamkeit auf die Frage nach der Existenz von Maßen zu richten. Nehmen wir die – noch zu beweisende – Existenz des Lebesgue-Maßes an, können wir daraus durch “Gewichtung” weitere Maße gewinnen. Dies ist besonders in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtig, wo z. B. die Normalverteilung durch Gewichtung der Gleichverteilung (dem Lebesgue-Maß) durch die Gaußsche Glockenkurve entsteht. Da Maße aber keine Funktionen sind und deshalb keine Punktwerte haben, ist dies nicht einfach durch punktweise Multiplikation möglich.

Stattdessen definieren wir den “gewichteten Inhalt” einer Menge durch ein entsprechendes Integral. Sei in Folge stets $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

Definition 6.1. Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$. Ist $h : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und erfüllt

$$(6.1) \quad \nu(A) = \int_A h d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A},$$

dann heißt h *Dichte von ν bezüglich μ* . Man schreibt dafür auch kurz $d\nu = h d\mu$ oder $h = \frac{d\nu}{d\mu}$ (die *Radon-Nikodým-Ableitung* von ν nach μ).

Umgekehrt wird für jede nichtnegative messbare Funktion h durch (6.1) ein Maß definiert, wobei die σ -Additivität aus [Folgerung 3.11](#) folgt.

Wie die Kurzschreibweise andeutet, lässt sich dann das Integral bezüglich ν mit Hilfe von h und μ ausdrücken. Es genügt wieder, dies für nichtnegative Funktionen zu zeigen.

Satz 6.2. Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$. Hat ν die Dichte h bezüglich μ , so gilt für alle $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar

$$\int f d\nu = \int f \cdot h d\mu.$$

Beweis. Wir verwenden das Monotonieprinzip aus [Satz 1.31](#). Setze

$$\mathcal{K} := \left\{ f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \int f d\nu = \int f \cdot h d\mu \right\}.$$

Dann gilt für $A \in \mathcal{A}$ nach Definition

$$\int \mathbb{1}_A d\nu = \nu(A) = \int_A h d\mu = \int \mathbb{1}_A \cdot h d\mu$$

und damit $\mathbb{1}_A \in \mathcal{K}$, d. h. Voraussetzung (i). Die Voraussetzungen (ii) und (iii) folgen wieder aus der Linearität und der monotonen Konvergenz des Lebesgue-Integrals. Nach [Satz 1.31](#) gilt die behauptete Gleichheit also für alle messbaren nichtnegativen Funktionen. $\square$

Insbesondere gilt für $d\nu = h d\mu$ und $d\rho = k d\nu$

$$\int f d\rho = \int f \cdot k d\nu = \int f \cdot k \cdot h d\mu$$

und daher $d\rho = (k \cdot h)d\mu$ bzw. die “Kettenregel” $\frac{d\rho}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\nu} \frac{d\nu}{d\mu}$.

Das folgende Eindeutigkeitsresultat rechtfertigt dabei, von “der” Radon-Nikodym-Ableitung zu sprechen.

Satz 6.3. *Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$. Ist ν σ -endlich und gilt $d\nu = h d\mu = h' d\mu$ für zwei $h, h' : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar, dann ist $h = h'$ μ -fast überall.*

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall das ν endlich ist. Aus der Linearität des Integrals folgt dann

$$\begin{aligned} \nu(\{h > h'\}) + \int (h - h')^+ d\mu &= \int \mathbb{1}_{\{h > h'\}} \cdot h' d\mu + \int \mathbb{1}_{\{h > h'\}} \cdot (h - h')^+ d\mu \\ &= \int \mathbb{1}_{\{h > h'\}} \cdot h d\mu = \nu(\{h > h'\}) < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\int (h - h')^+ d\mu = 0$, woraus mit [Satz 3.4](#) (iii) folgt $(h - h')^+ = 0$ und daher $h \leq h'$ μ -fast überall. Durch Vertauschen von h und h' erhalten wir die umgekehrte Ungleichung und damit die Behauptung.

Es existiere nun $E_n \uparrow S$ mit $\nu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können dann wie im ersten Fall für $\nu_n(A) := \nu(A \cap E_n) \leq \nu(E_n) < \infty$ argumentieren und erhalten

$$\int (h - h')^+ \cdot \mathbb{1}_{E_n} d\mu = 0.$$

Nun ist nach Annahme $(h - h')^+ \cdot \mathbb{1}_{E_n}$ eine monotone Folge mit $\sup_{n \geq 1} (h - h')^+ \cdot \mathbb{1}_{E_n} = (h - h')^+$, so dass aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt $\int (h - h')^+ d\mu = 0$ und damit wie oben die Behauptung. $\square$

Die zentrale Frage ist nun, wann ein gegebenes Maß ν eine Dichte bezüglich eines anderen Maßes μ besitzt. Die Frage, wann das *nicht* gilt, ist einfach zu beantworten: Wenn eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\nu(A) > 0$ aber $\mu(A) = 0$ (**warum?**). Die Bedingung $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ ist also offensichtlich notwendig. Dies motiviert die folgende Definition

Definition 6.4. Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$. Dann heißt

- (i) ν *absolutstetig* bezüglich μ , geschrieben $\nu \ll \mu$, falls gilt

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A},$$

- (ii) ν *singulär* bezüglich μ , geschrieben $\nu \perp \mu$, falls ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) = 0$ und $\nu(A^C) = 0$.

Beispiel 6.5. Betrachte $S = \mathbb{R}$ versehen mit der Borel-Algebra und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist das Dirac-Maß δ_x singulär bezüglich des Lebesgue-Maßes λ , denn $\lambda(\{x\}) = 0$ nach **Beispiel 2.16** und $\delta(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$ nach Definition.

Wir zeigen nun, dass die Absolutstetigkeit nicht nur notwendig sondern auch hinreichend ist. Dafür verwenden wir das folgende Resultat, das auch in anderen Situationen nützlich ist.

Satz 6.6 (Hahn-Zerlegung). Seien ν, ρ endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann existiert $A_{\leq} \in \mathcal{A}$ mit

- (i) $\nu(A) \leq \rho(A)$ für alle $A \subset A_{\leq}$,
 (ii) $\nu(A) \geq \rho(A)$ für alle $A \subset A_{\geq} := S \setminus A_{\leq}$.

Beweis. Der Beweis wird übersichtlicher durch etwas Notation. Setze $\delta(A) := \nu(A) - \rho(A) \in (-\infty, \infty)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $\delta(\emptyset) = 0$ und δ σ -additiv (**warum?**). (Man spricht daher auch von einem *endlichen signierten Maß*.) Weiter nennen wir eine Menge $N \in \mathcal{A}$ *negativ* (bezüglich δ), falls $\delta(A) \leq 0$ für alle messbaren $A \subset N$ gilt. Unser Ziel ist nun, $A_{\leq}$ als *maximale* negative Menge zu konstruieren. Dafür gehen wir schrittweise vor.

Schritt 1: Sind $N_1, N_2, \dots$ negativ, dann ist auch $\bigcup_{n \geq 1} N_n$ negativ. Sei dafür $A \subset \bigcup_{n \geq 1} N_n$ messbar. Dann ist für alle $k \geq 1$ auch

$$A_k := A \cap N_k \cap N_{k-1}^C \cap \dots \cap N_1^C \subset N_k$$

messbar und negativ und erfüllen $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$. Weiter sind alle A_k disjunkt, so dass aus der σ -Additivität von δ folgt

$$\delta(A) = \sum_{k \geq 1} \delta(A_k) \leq 0.$$

Schritt 2: Wir konstruieren eine negative Menge N mit $\delta(S \setminus N) \geq 0$ durch sukzessives Entfernen disjunkter Teilmengen B_k von S mit $\delta(B_k) \geq 0$ möglichst groß. Setze $B_1 := \emptyset$ mit $\delta(B_1) = 0$. Sind nun $B_1, \dots, B_k$ mit $\delta(B_1), \dots, \delta(B_k) \geq 0$ bereits gewählt, so setzen wir

$$s_k := \sup \{ \delta(A) \mid A \in \mathcal{A} \text{ disjunkt zu } B_1, \dots, B_k \} \geq \delta(\emptyset) = 0.$$

Dann können wir ein B_{k+1} disjunkt zu $B_1, \dots, B_k$ finden mit

$$\delta(B_{k+1}) \geq \begin{cases} \frac{s_k}{2} & \text{falls } s_k < \infty, \\ 1 & \text{falls } s_k = \infty. \end{cases}$$

(Ist $s_k = 0$ – d. h. wir haben S schon bis auf eine δ -Nullmenge ausgeschöpft – so wählen wir $B_{k+1} = \emptyset$.)

Setze nun $N := S \setminus \bigcup_{k \geq 1} B_k$. Dann gilt nach Konstruktion

$$0 \leq \sum_{k \geq 1} \delta(B_k) = \delta(N^C) < \infty,$$

da δ endlich ist. Daraus folgt $0 \leq \frac{1}{2}s_k \leq \delta(B_k) \rightarrow 0$ und damit $s_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Ist nun $A \subset N$ messbar, dann ist A nach Definition von N disjunkt zu allen B_k und daher gilt nach Definition von s_k auch $\delta(A) \leq s_k \rightarrow 0$. Also ist N negativ.

Schritt 3: Durch Anwenden von Schritt 2 auf $\delta'(A) := \delta(A \cap S')$ für beliebige messbare $S' \subset S$ erhalten wir eine negative Menge $N' \subset S'$ mit $\delta(S' \setminus N') \geq 0$ und damit $\delta(N') \leq \delta(S')$ (**warum?**).

Schritt 4: Wir konstruieren nun die gewünschte maximale Menge, die die gesuchten Eigenschaften hat. Betrachte dafür

$$\alpha := \inf \{ \delta(A) \mid A \in \mathcal{A} \} \leq \delta(\emptyset) = 0.$$

Dann existiert eine Folge $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $\delta(S_k) \rightarrow \alpha$ für $k \rightarrow \infty$. Nach Schritt 3 existiert nun für jedes $k \geq 1$ eine negative Menge N_k mit $\delta(N_k) \leq \delta(S_k)$. Daraus folgt auch $\alpha \leq \delta(N_k) \leq \delta(S_k) \rightarrow \alpha$. Wir setzen nun $A_{\leq} := \bigcup_{k \geq 1} A_k$. Nach Schritt 1 ist dann $A_{\leq}$ negativ und erfüllt

$$\alpha \leq \delta(A_{\leq}) = \delta(A_{\leq} \setminus N_k) + \delta(N_k) \leq \delta(S_k) \rightarrow \alpha$$

und damit $\alpha = \delta(A_{\leq}) > -\infty$. Daraus folgt nun die Behauptung:

- für $A \subset A_{\leq}$ messbar folgt aus der Negativität $\delta(A) \leq 0$;
- für $A \subset A_{\geq} := S \setminus A_{\leq}$ messbar ist A disjunkt zu $A_{\leq}$, und daher folgt aus der Definition von α und der σ -Additivität

$$\delta(A) = \delta(A_{\leq} \cup A) - \delta(A_{\leq}) \geq \alpha - \alpha = 0. \quad \square$$

Im Beweis ist nur $\delta(A) > -\infty$ und damit die Endlichkeit von ρ wesentlich; durch eine leichte Modifikation von Schritt 2 und Schritt 4 können wir die Endlichkeit von ν durch σ -Endlichkeit ersetzen (**warum?**).

Damit können wir nun Maße mit Dichten charakterisieren.

Satz 6.7 (Radon–Nikodým). Seien μ, ν σ -endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent

- (i) $\nu \ll \mu$,
- (ii) es existiert $h : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar mit $h = \frac{d\nu}{d\mu}$.

In diesem Fall ist h fast überall endlich.

Beweis. Die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar (**warum?**). Für die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) nehmen wir zuerst an, dass μ und ν endlich sind. Definiere

$$\mathcal{F} := \left\{ f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \int_A f d\mu \leq \nu(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A} \right\}$$

und setze

$$\beta := \sup_{f \in \mathcal{F}} \int f d\mu.$$

Wegen $0 \in \mathcal{F}$ und der Endlichkeit von ν ist dann $0 \leq \beta \leq \nu(S) < \infty$. Ziel ist nun, die gesuchte Dichte als $h \in \mathcal{F}$ mit $\int h d\mu = \beta$ zu konstruieren. Wieder gehen wir schrittweise vor.

Schritt 1: Sind $f, f' \in \mathcal{F}$, dann ist auch $\max\{f, f'\} \in \mathcal{F}$, denn für alle $A \in \mathcal{A}$ ist

$$\begin{aligned} \int_A \max\{f, f'\} d\mu &= \int_{A \cap \{f \geq f'\}} f d\mu + \int_{A \cap \{f < f'\}} f' d\mu \\ &\leq \nu(A \cap \{f \geq f'\}) + \nu(A \cap \{f < f'\}) = \nu(A). \end{aligned}$$

Sei nun $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}$ mit $\int f_n d\mu \rightarrow \beta$. Falls notwendig durch Ersetzen von f_n durch $\max\{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{F}$ können wir $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ annehmen. Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt daher $h := \sup_{n \geq 1} f_n \in \mathcal{F}$ und $\int h d\mu = \beta$ (**warum?**).

Schritt 2: Wegen $h \in \mathcal{F}$ gilt $\int_A h d\mu \leq \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$; wir müssen also die umgekehrte Ungleichung zeigen. Dafür verwenden wir **Satz 6.6**. Sei $A \in \mathcal{A}$ beliebig und betrachte für $\varepsilon > 0$ das endliche Maß ρ mit $d\rho = (h + \varepsilon \mathbb{1}_A) d\mu$. Für ρ und ν erhalten wir dann die Hahn-Zerlegung $A_{\leq}, A_{\geq} \in \mathcal{A}$ mit insbesondere für $A \cap A_{\leq} \subset A_{\leq}$

$$(6.2) \quad \nu(A \cap A_{\leq}) \leq \rho(A \cap A_{\leq}) \leq \rho(A) = \int_A h d\mu + \varepsilon \mu(A).$$

Betrachte nun $A \cap A_{\geq}$ und $g := h + \varepsilon \mathbb{1}_{A \cap A_{\geq}}$. Dann gilt

$$(6.3) \quad \int g \, d\mu = \int h \, d\mu + \varepsilon \mu(A \cap A_{\geq}) = \beta + \varepsilon \mu(A \cap A_{\geq}).$$

Weiter gilt für alle $A' \in \mathcal{A}$ wegen der Rechenregeln für charakteristische Funktionen (warum?)

$$\begin{aligned} \int_{A'} g \, d\mu &= \int (\mathbb{1}_{A' \cap A_{\leq}} + \mathbb{1}_{A' \cap A_{\geq}}) h + \varepsilon \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{A' \cap A_{\geq}} \, d\mu \\ &= \int_{A' \cap A_{\leq}} h \, d\mu + \int_{A' \cap A_{\geq}} h + \varepsilon \mathbb{1}_A \, d\mu \\ &= \int_{A' \cap A_{\leq}} h \, d\mu + \rho(A' \cap A_{\geq}) \\ &\leq \nu(A' \cap A_{\leq}) + \nu(A' \cap A_{\geq}) = \nu(A) \end{aligned}$$

wegen $h \in \mathcal{F}$ und $A' \cap A_{\geq} \subset A_{\geq}$. Also ist auch $g \in \mathcal{F}$ und damit $\int g \, d\mu \leq \beta$. Zusammen mit (6.3) folgt daraus $\mu(A \cap A_{\geq}) = 0$ und daher wegen (i) auch $\nu(A \cap A_{\geq}) = 0$. Aus (6.2) folgt damit

$$\nu(A) = \nu(A \cap A_{\leq}) \leq \int_A h \, d\mu + \varepsilon \mu(A).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\nu(A) \leq \int_A h \, d\mu$. Damit ist h die gesuchte Dichte, die nach Satz 6.2 fast überall eindeutig ist.

Schritt 3: Insbesondere folgt für $A = \{h = \infty\}$

$$\infty > \nu(\{h = \infty\}) = \int \mathbb{1}_{\{h=\infty\}} h \, d\nu = \infty \cdot \mu(\{h = \infty\}),$$

was nur für $\mu(\{h = \infty\}) = 0$ möglich ist.

Schritt 4: Sind μ, ν σ -endlich, so existieren $E_n \uparrow S$ mit $\mu(E_n) < \infty$ und $F_n \uparrow S$ mit $\nu(F_n) < \infty$. Durch das übliche “Zwiebelschalenprinzip” können wir daraus disjunkte Folgen mit $\bigcup_{n \geq 1} E_n = \bigcup_{m \geq 1} F_m = S$ und $\mu(E_n), \nu(F_m) < \infty$ konstruieren. Wir erhalten dadurch disjunkte Mengen $G_{n,m} := E_n \cap F_m$ mit $\bigcup_{n,m \geq 1} G_{n,m} = S$ und $\mu(G_{n,m}), \nu(G_{n,m}) < \infty$. Auf $G_{n,m}$ können wir die vorherigen Schritte anwenden (warum?) und erhalten Dichten $g_{n,m}$ mit $\nu(A \cap G_{n,m}) = \int_{G_{n,m}} g_{n,m} \, d\mu$. Da die Mengen disjunkt sind, können wir daraus die gesuchte Dichte $h := \sum_{n,m \geq 1} g_{n,m}$ auf S zusammensetzen. $\square$

Zwar hat nicht jedes Maß eine Dichte; für viele Zwecke reicht aber, dass man jedes Maß zerlegen kann in einen absolutstetigen und einen singulären Anteil.

Satz 6.8 (Lebesgue-Zerlegung). Seien μ, ν σ -endliche Maße auf $\mathcal{A}$. Dann existieren eindeutige Maße μ_a, μ_s mit

- (i) $\mu = \mu_a + \mu_s$, d. h. $\mu(A) = \mu_a(A) + \mu_s(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$,

(ii) $\mu_a \ll \nu$ und $\mu_s \perp \nu$.

Beweis. Da μ, ν σ -endlich sind und stets gilt $\nu \ll \mu + \nu$ (warum?), hat ν nach Satz 6.7 eine Dichte h bezüglich $\mu + \nu$, d. h.

$$(6.4) \quad \nu(A) = \int_A h d(\mu + \nu) = \int_A h d\mu + \int_A h d\nu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}$$

(warum?). Wir setzen jetzt

$$\mu_a(A) := \mu(A \cap \{h > 0\}), \quad \mu_s(A) := \mu(A \cap \{h = 0\}).$$

Dann gilt offensichtlich (i).

Sei nun $A \in \mathcal{A}$ eine ν -Nullmenge. Dann folgt aus (6.4), dass $\int_A h d\mu = 0$. Also ist $h \cdot 1_A = 0$ und daher auch $\mathbb{1}_{A \cap \{h > 0\}} = 0$ μ -fast überall, d. h. $\mu_a(A) = \mu(A \cap \{h > 0\}) = 0$. Es gilt daher $\mu_a \ll \nu$. Weiter ist $\mu_s(\{h > 0\}) = \mu(\emptyset) = 0$ und

$$\nu(\{h > 0\}) = \int_{\{h > 0\}} h d(\mu + \nu) = 0$$

und daher $\mu_s \perp \nu$. Also gilt auch (ii).

Sei nun $\mu = \mu'_a + \mu'_s$ eine weitere Lebesgue-Zerlegung. Wegen (ii) existieren dann $N, N' \in \mathcal{A}$ mit

$$\mu_s(N) = \mu'_s(N') = 0 \quad \text{und} \quad \nu(S \setminus N) = \nu(S \setminus N') = 0$$

und daher auch $\mu_a(S \setminus N) = \mu_a(S \setminus N') = 0$. Für beliebige $A \in \mathcal{A}$ folgt daraus (warum?)

$$\mu_a(A) = \mu_a(A \cap N \cap N') = \mu(A \cap N \cap N') = \mu'_a(A \cap N \cap N') = \mu'_a(A).$$

Ist μ endlich, so folgt daraus mit (i) auch $\mu_s = \mu'_s$. Den Fall μ σ -endlich erhalten wir daraus mit Hilfe der üblichen Ausschöpfung und der σ -Stetigkeit von μ_s . $\square$

7 MEHRFACHINTEGRALE UND PRODUKTMASSE

Wir betrachten nun Integrale und Maße auf Produkträumen. Zur Erinnerung: Sind $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ messbare Räume, so ist die Produkt-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ definiert als die durch die *messbaren Quader*

$$\mathcal{E} := \{A \times A' \mid A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'\}$$

erzeugte σ -Algebra. Da wir uns bislang vor der Konstruktion von Maßen gedrückt haben, beginnen wir mit Integralen von Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen und verwenden diese dann, um Maße auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ zu definieren (sonst wäre der umgekehrte Weg genauso möglich).

7.1 DOPPELINTEGRALE

Seien in Folge $(S, \mathcal{A}, \mu)$ und $(S', \mathcal{A}', \nu)$ zwei Maßräume und $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$. Ziel ist, das *Doppelintegral*

$$\int_S \left(\int_{S'} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

zu definieren. Wie üblich beginnen wir mit nicht-negativen Funktionen $f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Nach [Satz 3.4](#) (i) ist dann das innere Integral ebenfalls nicht-negativ; die Frage ist nun, wann dieses messbar ist als Funktion von x .

Lemma 7.1. *Sei ν σ -endlich und $f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar. Dann gilt:*

- (i) *die Abbildung $y \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{A}'$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar für alle $x \in S$,*
- (ii) *die Abbildung $x \mapsto \int_{S'} f(x, y) d\nu(y)$ ist $\mathcal{A}$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass ν endlich ist. Wir zeigen beide Aussagen mit Hilfe des Monotonieprinzips ([Satz 1.31](#)). Setze dafür

$$\mathcal{K} := \left\{ f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid f \text{ messbar erfüllt (i) und (ii)} \right\}.$$

Die ersten beiden Voraussetzungen von [Satz 1.31](#) folgen aus der Tatsache, dass Linearkombinationen und punktweise Suprema von messbaren Funktionen messbar sind sowie der

Linearität und monotonen Konvergenz von Integralen (**warum?**). Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathbb{1}_A \in \mathcal{K}$ für alle $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ gilt. Dafür verwenden wir wie in [Satz 2.10](#) den Umweg über ein Dynkin-System: Betrachte

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \mid \mathbb{1}_A \text{ erfüllt (i) und (ii)}\}.$$

Dann gilt:

- (i) $S \times S' \in \mathcal{D}$, denn $\mathbb{1}_{S \times S'}(x, y) = 1$ ist konstant und daher messbar mit

$$\int_{S'} \mathbb{1}_{S \times S'}(x, y) d\nu(y) = \nu(S')$$

ebenfalls konstant und messbar.

- (ii) Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1}_{S \times S'} - \mathbb{1}_A$ mit

$$\int_{S'} \mathbb{1}_{A^c}(x, y) d\nu(y) = \nu(S') - \int_{S'} \mathbb{1}_A(x, y) d\nu(y).$$

Wegen $\nu(S') < \infty$ folgt daraus $A^c \in \mathcal{D}$ (**warum?**).

- (iii) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ disjunkt, so ist $\mathbb{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n}$ messbar, und wegen [Folgerung 3.11](#) zusammen mit der Messbarkeit des punktweisen Grenzwerts folgt $\mathbb{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} \in \mathcal{D}$.

Also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System. Da die messbaren Quader einen schnittstabiler (**warum?**) Erzeuger von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ bilden, genügt es nun zu zeigen, dass $A \times A' \in \mathcal{D}$ für alle $A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'$ gilt. Dafür verwenden wir, dass $\mathbb{1}_{A \times A'}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_{A'}(y)$ gilt (**warum?**); daher ist $\mathbb{1}_{A \times A'}$ als punktweises Produkt von messbaren Funktionen messbar und erfüllt

$$\int_{S'} \mathbb{1}_{A \times A'}(x, y) d\nu(y) = \mathbb{1}_A(x) \int_{S'} \mathbb{1}_{A'}(y) d\nu(y) = \mathbb{1}_A(x) \nu(A'),$$

was ebenfalls messbar ist. Damit ist $A \times A' \in \mathcal{D}$. Nach [Satz 2.9](#) ist nun $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, woraus die Behauptung folgt.

Den Fall, dass ν σ -endlich ist, erhält man daraus wie üblich durch Ausschöpfung. □

Sind μ und ν beide σ -endlich, sind also die Doppelintegrale

$$\int_S \left(\int_{S'} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_{S'} \left(\int_S f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

wohldefiniert. Wir können uns nun fragen, wann diese den gleichen Wert haben, d. h. das Doppelintegral nicht von der Reihenfolge abhängt.

Satz 7.2 (Tonelli). Seien μ, ν σ -endlich und $f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar. Dann gilt

$$(7.1) \quad \int_S \left(\int_{S'} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{S'} \left(\int_S f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Lemma 7.1 und nehmen zuerst an, dass μ und ν endlich sind und betrachten

$$\mathcal{K} := \left\{ f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid f \text{ messbar erfüllt (7.1)} \right\}.$$

Wieder folgt aus zweimaliger Anwendung der Linearität und monotonen Konvergenz des Integrals, dass die ersten beiden Voraussetzungen von Satz 1.31 erfüllt sind (warum?). Für die dritte Voraussetzung betrachten wir

$$\mathcal{D} := \{ A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \mid \mathbb{1}_A \text{ erfüllt (7.1)} \}.$$

Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (warum?) mit $\mathbb{1}_{A \times A'} \in \mathcal{D}$ für alle $A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'$ (warum?), woraus wie oben die Behauptung folgt. $\square$

Wir lassen daher in Folge die Klammern weg um anzuzeigen, dass das Integral nicht von der Reihenfolge abhängt.

Das Integral für beliebige messbare $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir jetzt wieder über die Integrale der nicht-negativen Anteile f^+, f^- . Damit f integrierbar ist, sollte $|f| = f^+ + f^-$ doppelintegrierbar sein, d. h.

$$(7.2) \quad \int_S \int_{S'} |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty$$

(nach Tonelli unabhängig von der Reihenfolge) sein. Hier muss man allerdings aufpassen: Ist das äußere Integral endlich, so muss das innere Integral nur μ -fast überall endlich sein; wir können also nicht direkt folgern, dass sowohl $\int_{S'} f^+(x, y) d\nu(y) < \infty$ als auch $\int_{S'} f^-(x, y) d\nu(y) < \infty$ ist für alle $x \in S$, und damit ist unsere Definition des Integrals für messbare Funktionen nicht direkt anwendbar. Allerdings “sieht” das äußere Integral den Integranden nur fast überall, so dass wir über einen kleinen Umweg ans Ziel kommen.

Lemma 7.3. Sei $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und μ, ν σ -endlich. Gilt (7.2), dann existiert eine messbare Funktion $\hat{f} : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (i) $\hat{f}(x, y) = f(x, y)$ für μ -fast alle $x \in S$ und alle $y \in S'$,
- (ii) $y \mapsto \hat{f}(x, y)$ ist ν -integrierbar für alle $x \in S$,
- (iii) $x \mapsto \int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y)$ ist μ -integrierbar.

Beweis. Aus (7.2) folgt nach Satz 3.4 (iii), dass $\int_{S'} |f(x, y)| d\nu(y) < \infty$ für μ -fast alle $x \in S$ gilt, d. h. für $x \in A$ für eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A^c) = 0$. Wir definieren nun $\hat{f}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot f(x, y)$. Dann gilt

- (i) nach Definition;
- (ii) nach Wahl von A (denn die konstante Funktion $\hat{f}(x, \cdot) = 0$ ist integrierbar);
- (iii) wegen

$$\begin{aligned} \int_S \left| \int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) &\leq \int_S \int_{S'} |\hat{f}(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_S \int_{S'} |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Also ist unter der Voraussetzung (7.1) das Doppelintegral

$$\int_S \left(\int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

(in dieser Reihenfolge!) wohldefiniert und endlich und hängt nicht von der speziellen Wahl von $\hat{f}$ ab, falls mehrere Funktionen Lemma 7.3 erfüllen (warum?). Dies rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 7.4. Seien μ, ν σ -endlich und $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit (7.2). Dann ist das Doppelintegral von f definiert als

$$\int_S \int_{S'} f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) := \int_S \int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y) d\mu(x)$$

für die Funktion aus Lemma 7.3.

Wieder fragen wir uns, ob der Wert von der Integrationsreihenfolge abhängt. Dies ist – ohne Zusatzvoraussetzung! – stets der Fall.

Satz 7.5 (Fubini). Seien μ, ν σ -endlich und $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit (7.2). Dann gilt

$$\int_S \int_{S'} f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_{S'} \int_S f(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Beweis. Sei $\hat{f}$ aus Lemma 7.3. Dann folgt aus Lemma 7.3 (ii).

$$\int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y) = \int_{S'} \hat{f}^+(x, y) d\nu(y) - \int_{S'} \hat{f}^-(x, y) d\nu(y) \quad \text{für alle } x \in S.$$

Wegen Lemma 7.3 (iii) sind alle diese Integrale μ -integrierbare Funktionen von x (warum?); aus der Linearität des Integrals folgt daher

$$\begin{aligned} \int_S \left(\int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_S \left(\int_{S'} \hat{f}^+(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &\quad - \int_S \left(\int_{S'} \hat{f}^-(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Auf die rechte Seite können wir nun Satz 7.2 anwenden. Anwenden von Satz 7.2 auf (7.2) erlaubt uns, Lemma 7.3 auch für die vertauschten Integrale anzuwenden, so dass folgt

$$\int_S \left(\int_{S'} \hat{f}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{S'} \left(\int_S \hat{f}(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Wegen Lemma 7.3 (i) gilt weiter $f = \hat{f}$ fast überall und damit die Behauptung auch für f . $\square$

Analog können wir für *endliche* Produkte $\bigotimes_{n=1}^d \mathcal{A}_n$ für $(S_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ Maßräume und $f : \prod_{n=1}^d S_n \rightarrow \mathbb{R}$ messbar das Mehrfachintegral

$$\int_{S_n} \cdots \int_{S_1} f(x_1, \dots, x_n) d\mu_1(x_1) \cdots d\mu_n(x_n)$$

definieren.

7.2 PRODUKTMASSE

Wir verwenden nun Doppelintegrale, um aus μ und ν ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ zu definieren.

Satz 7.6. Seien μ, ν σ -endlich. Dann definiert

$$\pi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \pi(A) := \int_S \int_{S'} \mathbb{1}_A(x, y) d\nu(y) d\mu(x),$$

ein Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$, und für alle $f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ - $\mathcal{B}$ -messbar gilt

$$\int_{S \times S'} f d\pi = \int_S \int_{S'} f(x, y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\pi(\emptyset) = 0$. Für die σ -Additivität seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ disjunkt. Dann folgt aus [Folgerung 3.11](#)

$$\begin{aligned} \pi\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \int_S \int_{S'} \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n}(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_S \sum_{n \geq 1} \int_{S'} \mathbb{1}_{A_n}(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_S \int_{S'} \mathbb{1}_{A_n}(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \sum_{n \geq 1} \pi(A_n). \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt wieder aus dem Monotonieprinzip: Ist

$$\mathcal{K} = \left\{ f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \int f d\pi = \int_S \int_{S'} \mathbb{1}_A(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \right\},$$

so folgen die ersten beiden Voraussetzungen für [Satz 1.31](#) aus der Linearität und monotonen Konvergenz des Integrals, während $\infty_{\mathcal{A}} \in \mathcal{K}$ für alle $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ nach Definition von π gilt. $\square$

Man nennt π das *Produktmaß* von μ und ν , geschrieben $\mu \otimes \nu$, und schreibt auch $d\pi(x, y) = d\mu(x) \otimes d\nu(y)$. Es folgt direkt aus der Definition, dass $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}$ $\mu \otimes \nu$ -integrierbar ist genau dann, wenn gilt.

$$\int_{S \times S'} |f| d(\mu \otimes \nu) = \int_S \int_{S'} |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty.$$

Weiter ist $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ nach [Satz 3.4](#) (iii) eine $\mu \otimes \nu$ -Nullmenge genau dann, wenn gilt

$$\int_{S'} \mathbb{1}_A(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = 0 \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in S$$

gilt, d. h. genau dann, wenn $A_x := \{y \in S' \mid (x, y) \in A\}$ eine ν -Nullmenge für μ -fast alle $x \in S$ (bzw. umgekehrt A_y eine μ -Nullmenge für ν -fast alle $y \in S'$) ist.

Umgekehrt ist es interessant zu erkennen, ob ein Maß auf der Produkt-Algebra das Produktmaß gegebener Maße ist.

Satz 7.7. *Seien μ, ν σ -endlich. Dann gilt*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times A') = \mu(A) \cdot \nu(A') \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}',$$

und $\mu \otimes \nu$ ist durch diese Gleichung eindeutig festgelegt.

Beweis. Ist $A \in \mathcal{A}$ und $A' \in \mathcal{A}'$, dann folgt aus der Definition

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)(A \times A') &= \int_S \int_{S'} \mathbb{1}_{A \times A'}(x, y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_S \int_{S'} \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_{A'}(y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_S \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) \cdot \int_{S'} \mathbb{1}_{A'}(y) d\nu(y) \\ &= \mu(A) \cdot \nu(A'). \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt aus [Satz 2.10](#), da die messbaren Quader ein schnittstabiler Erzeuger der Produktalgebra sind. $\square$

Analog man für endlich viele Maßräume $(S_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$, $n = 1, \dots, d$, das Produktmaß $\otimes_{n=1}^d \mu_n$ auf $\otimes_{n=1}^d \mathcal{A}_n$.

Beispiel 7.8 (Lebesgue-Maß). Die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ wird erzeugt von den halboffenen Quadern

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d], \quad a \leq b \in \mathbb{R}^d,$$

für die nach Definition gilt

$$\lambda^d((a, b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) = \lambda((a_1, b_1]) \cdots \lambda((a_d, b_d]).$$

Also ist $\lambda^d = \otimes_{n=1}^d \lambda$ sowie für Borel-messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\int f d\lambda^d = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) d\lambda(x_1) \cdots d\lambda(x_n),$$

unabhängig von der Reihenfolge (da das Lebesgue-Maß σ -endlich ist).

7.3 KERNE

Besonders in der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es Fälle, in denen das “innere” Maß ν auch von x abhängen kann, z. B. wenn $d\nu_x := h(x, y)d\rho(y)$ eine von x abhängige Dichte hat. Damit hier das Doppelintegral wohldefiniert ist, ist eine zusätzliche Regularitätsannahme erforderlich.

Definition 7.9. Seien $(S, \mathcal{A})$ und $(S', \mathcal{A}')$ messbare Räume. Eine Familie $\{\nu_x\}_{x \in S}$ heißt *Kern* von $(S, \mathcal{A})$ auf $(S', \mathcal{A}')$, wenn gilt

- (i) für alle $x \in S$ ist ν_x ein endliches Maß auf $\mathcal{A}'$,

(ii) für alle $A' \in \mathcal{A}'$ ist die Abbildung $x \mapsto \nu(A')$ $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.

Lemma 7.10. Sei $\{\nu_x\}_{x \in S}$ ein von $(S, \mathcal{A})$ auf $(S', \mathcal{A}')$ und $f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar. Dann ist die Abbildung $x \mapsto \int f(x, y) d\nu_x(y)$ $\mathcal{A}$ - $\overline{\mathcal{B}}$ -messbar.

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem von Lemma 7.1 unter Verwendung der Zusatzannahme. Setze

$$\mathcal{K} := \left\{ f : S \times S' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \mid \int f(x, y) d\nu_x(y) \text{ ist messbar} \right\}.$$

Die ersten beiden Voraussetzungen von Satz 1.31 folgen wieder aus der Linearität und der monotonen Konvergenz von Integralen. Bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{1}_A \in \mathcal{K}$ für alle $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ gilt, wofür wir

$$\mathcal{D} := \left\{ A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}' \mid \int_{S'} \mathbb{1}_A(x, y) d\nu_y \text{ ist messbar} \right\}$$

betrachten. Dann gilt:

(i) $S \times S' \in \mathcal{D}$, denn

$$\int_{S'} \mathbb{1}_{S \times S'}(x, y) d\nu_x(y) = \nu_x(S')$$

ist messbar für $S' \in \mathcal{A}'$ wegen der Kerneigenschaft.

(ii) Ist $A \in \mathcal{D}$, so ist

$$\int_{S'} \mathbb{1}_{A^c}(x, y) d\nu_x(y) = \nu_x(S') - \int_{S'} \mathbb{1}_A(x, y) d\nu_x(y)$$

messbar wegen (i) und $A \in \mathcal{D}$.

(iii) Sind $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ disjunkt, so gilt $\mathbb{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{A_n} \in \mathcal{D}$ wegen Folgerung 3.11 und der Messbarkeit des punktweisen Grenzwerts.

Also ist $\mathcal{D}$ wieder ein Dynkin-System, und es genügt $\mathbb{1}_{A \times A'} \in \mathcal{D}$ für $A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'$ zu zeigen. Dies folgt aber wegen

$$\int_{S'} \mathbb{1}_{A \times A'}(x, y) d\nu_x(y) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \nu_x(A')$$

aus der Kerneigenschaft. □

Genau wie zuvor können wir jetzt das Doppelintegral

$$\int_S \left(\int_{S'} f(x, y) d\nu_x(y) \right) d\mu(x)$$

(in dieser Reihenfolge!) sowie das Produktmaß $\mu \otimes \nu_x$ definieren, was wir hier nicht weiter ausführen.

8 KONSTRUKTION VON MASSEN

Wir haben in [Satz 2.10](#) gesehen, dass ein Maß auf einer σ -Algebra durch die Werte auf einem (schnittstabilen) Erzeuger eindeutig festgelegt sind. Noch offen ist die umgekehrte Frage: Ob bzw. wann und wie man durch das Festlegen von Werten auf einem Erzeuger ein Maß – d. h. eine σ -additive Funktion – auf der erzeugten σ -Algebra definieren kann. Diese *Fortsetzung* würde nicht nur die Existenz des Lebesgue-Maßes garantieren (und damit die Lücke im Beweis von [Satz 2.11](#) schließen) sondern auch erlauben, weitere Maße mit vorgegebenen Eigenschaften zu konstruieren. Wir illustrieren letzteres mit zwei Anwendungen, die in der Funktionalanalysis bzw. der geometrischen Maßtheorie wichtig sind.

8.1 ÄUSSERE MASSE UND FORTSETZUNG

Die Grundidee ist dabei eine “Approximation von außen”: Um das Maß einer Menge zu bestimmen, nehmen wir eine Überdeckung mit Mengen aus dem Erzeuger und summieren die entsprechenden Werte auf; der minimale Wert, den wir mit solchen Überdeckungen erreichen können, ist dann das gesuchte Maß der Menge. Da wir die Mengen nicht als disjunkt vorausgesetzt haben, können wir im allgemeinen keine Additivität der so definierten Maßapproximation erwarten; höchstens Subadditivität. Wir drehen daher den Spieß um: Anstatt zuerst eine σ -Algebra festzulegen und darauf ein Maß zu definieren, betrachten wir eine subadditive äußere Approximation auf der gesamten Potenzmenge und suchen dann diejenigen Mengen, auf denen die Approximation sogar σ -additiv sind. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 8.1 (äußeres Maß). Sei $S \neq \emptyset$. Dann heißt $\eta : \mathcal{P}(S) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *äußeres Maß* auf S , falls gilt

- (i) $\eta(\emptyset) = 0$,
- (ii) $\eta(A) \leq \sum_{n \geq 1} \eta(A_n)$ für $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$.

Eine Menge $A \subset S$ heißt dann *η -messbar*, falls gilt

$$\eta(C \cap A) + \eta(C \cap A^C) = \eta(C) \quad \text{für alle } C \subset S.$$

Wir schreiben in Folge

$$\mathcal{A}_\eta := \{A \subset S \mid A \text{ } \eta\text{-messbar}\}.$$

Direkt aus der Subadditivität (ii) folgt, dass für äußere Maße gilt

$$\eta(A) \leq \eta(A') \quad \text{falls } A \subset A',$$

d. h. Monotonie.

Wir zeigen nun, dass die η -Messbarkeit genau die fehlende Eigenschaft ist, die der Subadditivität zur Additivität fehlt, d. h. dass η eingeschränkt auf $\mathcal{A}_\eta$ sogar ein Maß definiert.

Satz 8.2 (Carathéodory). *Sei η ein äußeres Maß auf S . Dann ist $\mathcal{A}_\eta$ eine σ -Algebra und*

$$\mu : \mathcal{A}_\eta \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \mu(A) = \eta(A),$$

ein Maß auf $\mathcal{A}_\eta$.

Beweis. Direkt aus der Definition folgt für $C \subset S$

$$\eta(C \cap S) + \eta(C \cap S^C) = \eta(C) + \eta(\emptyset) = \eta(C)$$

und damit $S \in \mathcal{A}_\eta$. Ebenso schnell folgt für $A \in \mathcal{A}_\eta$ und $C \subset S$

$$\eta(C \cap A^C) + \eta(C \cap (A^C)^C) = \eta(C \cap A^C) + \eta(C \cap A) = \eta(C)$$

und damit $A^C \in \mathcal{A}$.

Wir zeigen nun schrittweise die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}_\eta$ bezüglich Vereinigungen sowie die Additivität von η , beginnend mit zwei Mengen. Seien dafür $A, B \in \mathcal{A}_\eta$ und $C \subset A$. Aus der Subadditivität von η folgt dann

$$\eta(C) \leq \eta(C \cap (A \cup B)) + \eta(C \cap (A \cup B)^C),$$

denn $(C \cap (A \cup B)) \cup (C \cap (A \cup B)^C) = C$ ist eine Überdeckung. Wegen $A, B \in \mathcal{A}_\eta$ gilt dann

$$\begin{aligned} \eta(C) &= \eta(C \cap A) + \eta(C \cap A^C) \\ &= \eta(C \cap A) + \eta(C \cap A^C \cap B) + \eta(C \cap A^C \cap B^C). \end{aligned}$$

Nun ist aber $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap A^C \cap B)$ (**warum?**), so dass aus der Subadditivität und dem Distributivgesetz folgt

$$\eta(C) \geq \eta(C \cap (A \cup B)) + \eta(C \cap (A \cup B)^C)$$

und damit $A \cup B \in \mathcal{A}_\eta$. Daraus folgt auch $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathcal{A}$. Insbesondere gilt für $A \cap B = \emptyset$ und $C = A \cup B$

$$\eta(A \cup B) = \eta((A \cup B) \cap A) + \eta((A \cup B) \cap A^C) = \eta(A) + \eta(B).$$

Die Behauptung gilt daher für die Vereinigung endlich vieler Mengen.

Seien nun $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_\eta$ disjunkt und setze $B_m := \bigcup_{n=1}^m A_n$ sowie $B := \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Dann ist nach dem eben bewiesenen $B_m \in \mathcal{A}_\eta$, und daher gilt für alle $C \subset S$ und $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \eta(C \cap B_m) &= \eta(C \cap B_m \cap A_m) + \eta(C \cap B_m \cap A_m^c) \\ &= \eta(C \cap A_m) + \eta(C \cap B_{m-1}) = \dots = \sum_{n=1}^m \eta(C \cap A_n), \end{aligned}$$

woraus zusammen mit der Monotonie wegen $B_m^c \supset B^c$ folgt

$$\eta(C) = \eta(C \cap B_m) + \eta(C \cap B_m^c) \geq \sum_{n=1}^m \eta(C \cap A_n) + \eta(C \cap B^c).$$

Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ und die Subadditivität von η ergeben dann

$$\eta(C) \geq \sum_{n \geq 1} \eta(C \cap A_n) + \eta(C \cap B^c) \geq \eta(C \cap B) + \eta(C \cap B^c) \geq \eta(C).$$

Alle Ungleichungen gelten daher mit Gleichheit, und damit ist $B = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}_\eta$. Speziell für $C = B$ folgt aus der Gleichheit auch

$$\eta\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \eta(A_n) + \eta(\emptyset) = \sum_{n \geq 1} \eta(A_n)$$

und damit die σ -Additivität von η auf $\mathcal{A}_\eta$.

Die Vereinigung von beliebigen $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}_\eta$ erhält man wie üblich durch “Disjunktifizieren” (da wir gezeigt haben, dass endliche Vereinigungen η -messbar sind). Also ist $\mathcal{A}_\eta$ eine σ -Algebra und η ein Maß. $\square$

Sei nun $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(S)$ ein Mengensystem und $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ gegeben. Wir definieren dann unsere *äußere Approximation* durch

$$(8.1) \quad \mu(A) := \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \pi(E_n) \mid E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}, A \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n \right\}.$$

Falls für A keine Überdeckung mit Mengen aus $\mathcal{E}$ existiert, ist das Infimum über die leere Menge nach Konvention $\mu(A) = \infty$.

Wir zeigen nun, unter welchen Bedingungen dadurch ein äußeres Maß auf S definiert wird und $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_\eta$ gilt.

Satz 8.3 (Fortsetzungssatz). Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(S)$ und $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Dann definiert (8.1) ein Maß μ auf $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mu(E) = \pi(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$ genau dann, wenn gilt

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,

- (ii) $\mu(E) = \pi(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$,
 (iii) $\mu(E' \cap E) + \mu(E' \cap E^C) \leq \pi(E')$ für alle $E, E' \in \mathcal{E}$.

Beweis. Ist μ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mu|_{\mathcal{E}} = \pi$, so folgt sofort (i)–(iii) (**warum?**).

Für die umgekehrte Richtung zeigen wir zuerst, dass durch (8.1) ein äußeres Maß η auf S definiert wird. Wegen $\emptyset \in \sigma(\mathcal{E})$ folgt aus (i) sofort $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Seien nun $A, A_1, A_2, \dots \subset S$ mit $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Nach Definition von ν existieren dann für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ Mengen $E_{n,1}, E_{n,2}, \dots \in \mathcal{E}$ mit $A_n \subset \bigcup_{m \geq 1} (E_{n,m})$ sowie

$$\sum_{m \geq 1} \pi(E_{n,m}) \leq \eta(A_n) + \varepsilon 2^{-n}.$$

Dann ist auch $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset \bigcup_{n,m \geq 1} E_{n,m}$, und nach Definition von η als Infimum folgt mit der geometrischen Reihe

$$\eta(A) \leq \sum_{n,m \geq 1} \pi(E_{n,m}) \leq \sum_{n \geq 1} \eta(A_n) + \varepsilon.$$

(Falls für ein A_n keine solche Überdeckung existiert, ist $\eta(A_n) = \infty$ nach Definition, und die Ungleichung gilt trivialerweise.) Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Subadditivität. Also ist η ein äußeres Maß.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_\eta$ gilt. Sei dafür $E \in \mathcal{E}$ und $C \subset S$ beliebig. Wegen der Monotonie von äußeren Maßen genügt es zu zeigen, dass

$$\eta(C) \geq \eta(C \cap E) + \eta(C \cap E^C)$$

gilt, was offensichtlich erfüllt ist falls $\eta(C) = \infty$. Wir können also annehmen, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E}$ von C existiert mit

$$\sum_{n \geq 1} \pi(E_n) \leq \eta(C) + \varepsilon$$

Dann ist $C \cap E \subset \bigcup_{n \geq 1} (E_n \cap E)$ sowie $C \cap E^C \subset \bigcup_{n \geq 1} (E_n \cap E^C)$ (**warum?**). Aus der Subadditivität von η folgt daher

$$\begin{aligned} \eta(C \cap E) + \eta(C \cap E^C) &\leq \sum_{n \geq 1} \eta(E_n \cap E) + \sum_{n \geq 1} \eta(E_n \cap E^C) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \pi(E_n) \leq \eta(C) + \varepsilon \end{aligned}$$

wegen Annahme (iii) und der Wahl der E_n . Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die gesuchte Ungleichung. Also ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_\eta$.

Aber da η ein äußeres Maß ist, ist $\mathcal{A}_\eta$ nach Satz 8.2 eine σ -Algebra; also muss auch $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}_\eta$ gelten. Ebenfalls nach Satz 8.2 ist dann $\mu := \eta|_{\sigma(\mathcal{E})}$ ein Maß, das nach Annahme (ii) $\mu|_{\mathcal{E}} = \eta|_{\mathcal{E}} = \pi$ erfüllt. $\square$

Insbesondere definiert jede äußere Approximation der Form (8.1) mit $\pi(\emptyset) = 0$ ein äußeres Maß.

Wir können nun endlich die Existenz des Lebesgue-Maßes als Fortsetzung des Volumens von Quadern beweisen.

Satz 8.4. Sei $\mathcal{B}^d$ die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^d$. Dann existiert ein Maß λ^d auf $\mathcal{B}^d$ mit

$$\lambda^d([a, b)) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Beweis. Es genügt, den Fall $d = 1$ zu betrachten, denn den allgemeinen Fall erhalten wir daraus mit [Beispiel 7.8](#). Setze also

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \{[a, b) \mid a \leq b \in \mathbb{R}\}, \\ \pi : \mathcal{E} &\rightarrow [0, \infty), \quad \pi([a, b)) := b - a, \end{aligned}$$

sowie μ definiert durch (8.1). Wir weisen nun die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes nach.

Zu (i): Es gilt $\pi(\emptyset) = \pi([a, a)) = a - a = 0$ und damit auch $0 \leq \mu(\emptyset) \leq \pi(\emptyset) = 0$.

Zu (ii): Nach Definition als Infimum gilt für alle $E \in \mathcal{E}$ immer $\mu(E) \leq \pi(E)$, da E sich selbst überdeckt. Also genügt es, die umgekehrte Ungleichung nachzuweisen, die ebenfalls nach Definition als Infimum äquivalent ist zu

$$(ii') \quad \pi(E) \leq \sum_{n \geq 1} \pi(E_n) \text{ für alle } E, E_1, E_2, \dots \in \mathcal{E} \text{ mit } E \subset \bigcup_{n \geq 1} E_n.$$

Sei also $E = [a, b) \subset \bigcup_{n \geq 1} [a_n, b_n)$. Der Trick ist jetzt, ein Kompaktheitsargument anzuwenden, um daraus eine *endliche* Überdeckung zu extrahieren, für die wir die Ungleichung nachweisen können. Sei dafür $\varepsilon > 0$ beliebig und wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\varepsilon_n \leq \varepsilon 2^{-n}$. Dann ist

$$[a, b - \varepsilon] \subset [a, b) \subset \bigcup_{n \geq 1} [a_n, b_n) \subset \bigcup_{n \geq 1} (a_n + \varepsilon_n, b).$$

Wir haben also eine offene Überdeckung der kompakten Menge $[a, b - \varepsilon]$, für die eine endliche Teilüberdeckung enthält. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ groß genug, dass

$$[a, b - \varepsilon] \subset [a, b - \varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n - \varepsilon_n, b)$$

gilt. Durch Weglassen von Intervallen, die vollständig in anderen enthalten sind, und Umsortieren können wir annehmen, dass gilt

- $a_1 - \varepsilon_1 \leq a \leq b - \varepsilon \leq b_N$,
- $b_n \in (a_{n+1} - \varepsilon_{n+1}, b_{n+1})$ für $n = 1, \dots, N - 1$.

Daraus folgt mit Teleskopsumme

$$\begin{aligned}
 b - \varepsilon - a &\leq b_N - (a_1 + \varepsilon_1) = b_N - (a_N - \varepsilon_N) + \sum_{n=1}^{N-1} ((a_{n+1} - \varepsilon_{n+1}) - (a_n - \varepsilon_n)) \\
 &\leq b_N - (a_N - \varepsilon_N) + \sum_{n=1}^{N-1} ((b_n) - (a_n - \varepsilon_n)) \\
 &\leq \sum_{n=1}^N (b_n - a_n) - \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ ergibt dann

$$\pi([a, b]) = b - a \leq \sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) = \sum_{n \geq 1} \pi([a_n, b_n]).$$

Zu (iii): Seien $E = [a, b)$ und $E' = [a', b')$. Da $\mathcal{E}$ schnittstabil ist mit $\emptyset \in \mathcal{E}$, existieren $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ mit

$$E' \cap E = [\tilde{a}, \tilde{b}), \quad E' \cap E^C = [a', \tilde{a}) \cup [\tilde{b}, b')$$

(wobei Intervalle leer sein können für z. B. $a' > \tilde{a}$). Daraus folgt nach Definition von μ

$$\begin{aligned}
 \mu(E' \cap E) &\leq \pi([\tilde{a}, \tilde{b})) = \tilde{b} - \tilde{a}, \\
 \mu(E' \cap E^C) &\leq \pi([a', \tilde{a})) + \pi([\tilde{b}, b')) = (\tilde{a} - a') + (b' - \tilde{b})
 \end{aligned}$$

und daher

$$\mu(E' \cap E) + \mu(E' \cap E^C) \leq (\tilde{b} - \tilde{a}) + (\tilde{a} - a') + (b' - \tilde{b}) = b' - a' = \pi(E').$$

Nach [Satz 8.3](#) ist daher μ ein Maß auf der Borel-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$, dass wegen der Schnittstabilität von $\mathcal{E}$ nach [Satz 2.10](#) gleich dem Lebesgue-Maß λ sein muss. $\square$

Ein Maß auf der Borel-Algebra nennt man auch *Borel-Maß*.

Das System der (im Sinne von äußeren Maßen) Lebesgue-messbaren Mengen ist strikt größer als die Borel-Algebra.

Beispiel 8.5. Sei $A \in \mathbb{R}$ Teilmenge einer Lebesgue-Nullmenge, d. h. es existiert ein $N \in \mathcal{B}$ mit $A \subset N$ und $\lambda(N) = 0$. Bezeichne $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ das im Beweis von [Satz 8.4](#) konstruierte äußere Maß (d. h. $\mu|_{\mathcal{B}} = \lambda$). Dann folgt für alle $C \in \mathbb{R}$ aus der Monotonie von äußeren Maßen

$$\mu(C \cap A) + \mu(C \cap A^C) \leq \mu(A) + \mu(C) \leq \mu(N) + \mu(C) = \lambda(N) + \mu(C) = \mu(C)$$

und damit $A \in \mathcal{A}_\mu$.

Das Lebesgue-Maß kann also sogar fortgesetzt werden auf die *Lebesgue-Borel-Algebra*, die von allen offenen Mengen und allen Teilmengen von Lebesgue-Nullmengen erzeugt wird.

8.2 DER DARSTELLUNGSSATZ VON RIESZ

Ist S ein metrischer Raum, so definiert jedes Borel-Maß μ eine Abbildung $f \mapsto \int f d\mu$ auf dem Raum der integrierbaren Funktionen; dieses ist

- (i) *linear*, d. h. $\int \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$,
- (ii) *positiv*, d. h. $f \geq 0$ impliziert $\int f d\mu \geq 0$,
- (iii) *stetig*, d. h. $f_n \rightarrow f$ punktweise (mit integrierbarer Majorante) impliziert $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$;

man spricht daher auch von einem *positiven linearen stetigen Funktional*. Interessant ist auch die umgekehrte Frage: Welche (positiven linearen stetigen) Funktionale lassen sich auf diese Weise “darstellen”, so dass man für sie alle nützlichen Eigenschaften von Integralen anwenden kann? Es gibt eine ganze Familie solcher Darstellungssätze, die sich in den Annahmen an den Raum, auf dem die Funktionale definiert sind, unterscheiden. Wir betrachten hier den einfachsten für $C(S)$, den Raum der stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm (d. h. die Stetigkeit ist bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz).

Satz 8.6 (Riesz). *Sei S ein kompakter metrischer Raum mit Borel-Algebra $\mathcal{B}$ und $\ell : C(S) \rightarrow \mathbb{R}$ ein positives lineares stetiges¹ Funktional. Dann existiert ein endliches Maß $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ mit*

$$\ell(f) = \int f d\mu \quad \text{für alle } f \in C(S).$$

Beweis. Wir wenden den Fortsetzungssatz (Satz 8.3) an auf den Erzeuger $\mathcal{O} = \{O \subset S \mid O \text{ offen}\}$ und

$$\pi : \mathcal{O} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \pi(O) := \sup \{ \ell(f) \mid 0 \leq f \leq \mathbb{1}_O \text{ stetig} \}.$$

(Beachte, dass $\mathbb{1}_O$ im Allgemeinen nicht stetig ist, so dass wir nicht direkt $\ell(\mathbb{1}_O)$ verwenden können.) Aus der Monotonie von positiven linearen ($g - f \geq 0$ impliziert $\ell(g) - \ell(f) = \ell(g - f) \geq 0$) zusammen mit den Eigenschaften des Supremums folgt (warum?) dass gilt

- (i) $\pi(O) \leq \pi(O')$ falls $O \subset O'$,
- (ii) $\ell(f) \leq \pi(O) \leq \ell(g)$ falls $f \leq \mathbb{1}_O \leq g$.

Wir definieren nun wieder die äußere Approximation μ auf $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$ durch

$$\mu(B) := \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \pi(O_n) \mid O_n \in \mathcal{O}, B \subset \bigcup_{n \geq 1} O_n \right\}$$

und weisen die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes nach.

¹Tatsächlich folgt hier die Stetigkeit bereits aus der Linearität und Positivität, so dass keine zusätzliche Forderung ist; in der Literatur ist der Satz daher für beliebige positive lineare Funktionale formuliert.

Zu (i): Da $\mathbb{1}_\emptyset = 0$ stetig ist, gilt $\mu(\emptyset) = \pi(\emptyset) = \ell(0) = 0$.

Zu (ii): Es genügt wieder zu zeigen, dass gilt

$$\pi(O) \leq \sum_{n \geq 1} \pi(O_n) \quad \text{für } O, O_1, O_2, \dots \in \mathcal{O} \text{ mit } O \subset \bigcup_{n \geq 1} O_n.$$

Wir betrachten dafür für $O \in \mathcal{O}$ die stetige untere Approximation von $\mathbb{1}_O$ definiert durch

$$\varphi_n^O(x) := \min \{1, nd(x, O^C)\}, \quad d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y),$$

wobei das Infimum für die wegen $O \in \mathcal{O}$ abgeschlossene Menge O^C angenommen wird. Dann gilt (warum?)

- (i) φ_n^O ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $0 \leq \varphi_1^O \leq \varphi_2^O \leq \dots \leq \mathbb{1}_O$,
- (iii) $\sup_{n \geq 1} \varphi_n^O = \mathbb{1}_O$.

Insbesondere folgt daraus $\ell(\varphi_n^O) \leq \pi(O)$. Sei nun $O_1, O_2, \dots \in \mathcal{O}$ mit $O \subset \bigcup_{n \geq 1} O_n$ und $0 \leq f \leq \mathbb{1}_O$ stetig. Wir definieren nun

$$g_m := \sum_{n=1}^m \varphi_m^{O_n}, \quad f_m := \min\{f, g_m\}.$$

Dann gilt

$$\ell(f_m) \leq \ell(g_m) = \sum_{n=1}^m \ell(\varphi_m^{O_n}) \leq \sum_{n=1}^m \pi(O_n).$$

Weiter folgt aus der Überdeckungseigenschaft und den Eigenschaften von $\varphi_m^{O_n}$, dass $f \leq \mathbb{1}_O \leq \sup_{m \geq 1} g_m$ und daher $f_m \rightarrow f$ gilt (warum?); da S als kompakt vorausgesetzt war, ist diese punktweise Konvergenz sogar gleichmäßig. Aus der Stetigkeit von ℓ folgt deshalb

$$\ell(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \ell(f_m) \leq \sum_{n \geq 1} \pi(O_n),$$

und Supremum über alle $0 \leq f \leq \mathbb{1}_O$ ergibt die Behauptung.

Zu (iii): Hier verwenden wir die stetige untere Approximation

$$\psi_n^O(x) := \min \{1, (nd(x, O^C) - 1)^+\},$$

die die selben Eigenschaften wie φ_n^O erfüllt; außerdem gilt $d(x, O^C) > \frac{1}{n}$ für alle $x \in S$ mit $\psi_n^O(x) > 0$. Wir setzen nun für $O, O' \in \mathcal{O}$

$$V := \left\{ x \in O' \mid d(x, O^C) < \frac{1}{n} \right\}$$

und $g_n := \psi_n^{O \cap O'}$. Dann gilt $V \cap \{g_n > 0\} = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (warum?). Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $0 \leq g_n \leq \mathbb{1}_{O \cap O'}$ existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\pi(O \cap O') \leq \ell(g_n) + \varepsilon.$$

Außerdem ist V offen (warum?); also existiert ein $0 \leq h \leq \mathbb{1}_V$ mit

$$\pi(V) \leq \ell(h) + \varepsilon.$$

Wegen $V \subset O'$ und $g_n(x) = 0$ für $x \in V$ gilt dann auch $0 \leq g_n + h \leq \mathbb{1}_{O'}$. Zusammen mit $O^C \cap O' \subset V$ folgt dann aus der Definition von μ und der Eigenschaft (ii) von π sowie der Linearität von ℓ

$$\mu(O' \cap O) + \mu(O' \cap O^C) \leq \pi(O' \cap O) + \pi(V) \leq \ell(g_n + h) + 2\varepsilon \leq \pi(O') + 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Nach dem Fortsetzungssatz ist also μ ein Maß auf $\mathcal{B}$, für das $\mu(S) = \ell(\mathbb{1}_S) = \ell(1) < \infty$ gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $\ell(f) = \int f d\mu$ für alle $f \in C(S)$ gilt. Sei dafür zunächst $f \in C(S)$ mit $f \geq 0$ beliebig und setze für $n \geq 1, k \geq 0$

$$f_{n,k} := \min \left\{ \frac{1}{n}, \left(f - \frac{k}{n} \right)^+ \right\}.$$

Dann sind alle $f_{n,k}$ stetig und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (warum?)

$$f = \sum_{k=1}^N f_{n,k},$$

wobei nur $N = N(n)$ endlich viele Summanden von Null verschieden sind da f als stetige Funktion auf der kompakten Menge S beschränkt ist. Weiter sieht man durch punktweise Fallunterscheidung leicht, dass gilt

$$\frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{f > \frac{k+1}{n}\}} \leq f_{n,k} \leq \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{f > \frac{k}{n}\}}.$$

Aus der Monotonie des Integrals folgt daraus sofort

$$(8.2) \quad \frac{1}{n} \mu \left(\left\{ f > \frac{k+1}{n} \right\} \right) \leq \int f_{n,k} d\mu \leq \frac{1}{n} \mu \left(\left\{ f > \frac{k}{n} \right\} \right).$$

Weiter ist $\{f > \frac{k}{n}\}$ offen wegen der Stetigkeit von f ; wegen $\mu|_O = \pi$ und der Eigenschaft (ii) von π gilt daher

$$(8.3) \quad \frac{1}{n} \mu \left(\left\{ f > \frac{k+1}{n} \right\} \right) \leq \ell(f_{n,k}) \leq \frac{1}{n} \mu \left(\left\{ f > \frac{k}{n} \right\} \right).$$

Wegen der Linearität von Integral und ℓ können wir auf (8.2) und (8.3) die (endliche!) Summe $f = \sum_{k=0}^N f_{n,k}$ anwenden und erhalten nach Indexverschiebung

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N+1} \mu \left(\left\{ f > \frac{k}{n} \right\} \right) &\leq \int f \, d\mu \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \mu \left(\left\{ f > \frac{k}{n} \right\} \right), \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N+1} \mu \left(\left\{ f > \frac{k}{n} \right\} \right) &\leq \ell(f) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \mu \left(\left\{ f > \frac{k}{n} \right\} \right). \end{aligned}$$

Subtraktion der passenden Ungleichungen und Anwenden der Teleskopsumme ergibt dann

$$\left| \int f \, d\mu - \ell(f) \right| \leq \frac{1}{n} \left(\mu(\{f > 0\}) - \mu(\{f > \frac{N+1}{n}\}) \right) \leq \frac{1}{n} \mu(S) \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ wegen $\mu(S) < \infty$.

Ist $f \in C(S)$ beliebig, können wir dies auf $f^+, f^- \geq 0$ anwenden und erhalten wieder aus der Linearität bzw. Definition

$$\ell(f) = \ell(f^+) - \ell(f^-) = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f \, d\mu. \quad \square$$

Für beliebige stetige lineare Funktionale erhält man eine analoge Darstellung durch endliche signierte Maße (d. h. die Differenz zweier endlicher Maße, siehe Satz 6.6). Dadurch erhält man eine Charakterisierung des Dualraums des Raums der stetigen Funktionen, was (nicht nur) in der Funktionalanalysis wichtig ist.

8.3 HAUSDORFF-MASSE

Wie Beispiel 2.16 zeigt haben abzählbare Punktmengen – und allgemein “dünne” Mengen – Lebesgue-Maß 0. Dies ist ein Problem, wenn wir z. B. wie etwa im Satz von Gauß über den Rand eines Gebiets in $\mathbb{R}^d$ integrieren wollen. Zum Abschluss dieses Kapitels konstruieren wir daher eine Familie von Maßen, die auch solchen Mengen – unabhängig von der Raumdimension! – einen positiven Inhalt geben können. Die Idee ist dabei folgende: Statt wie im Lebesgue-Maß das Volumen von überdeckenden Würfeln aufzusummieren, verwenden wir hier für überdeckende Mengen eine passende Potenz des Durchmessers; diese Potenz wählen wir entsprechend der Menge, die wir messen wollen: kubisch für Volumen, quadratisch für Flächen, linear für Kurven,

Um dies mathematisch präzise zu machen, definieren wir für einen metrischen Raum (S, d) und $A \subset S$ den *Durchmesser*

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

und setzen für $s \geq 0$ und $\delta > 0$

$$\eta_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^s \mid A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n, \text{diam}(A_n) \leq \delta \right\}.$$

Diese Definition macht auch für $s \notin \mathbb{N}$ Sinn; das werden wir später vertiefen. Die Einschränkung an den Durchmesser der überdeckenden Mengen A_n ist hierbei notwendig, denn sonst wären zu wenige Mengen messbar. Zum Beispiel für $S = \mathbb{R}$ und $s = \frac{1}{2}$ könnten wir $A = [0, 1]$ offensichtlich mit sich selbst überdecken; also ist $\eta_\infty^{1/2}(A) \leq 1$. Wegen der Konkavität der Wurzelfunktion hätte jede Überdeckung mit mehr und kleineren Intervallen einen größeren Wert, z. B. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$. Dies zeigt $\eta^{1/2}(A) = 1$; das selbe Argument zeigt aber, dass $\eta_\infty^{1/2}$ für Intervalle nicht additiv und damit kein Maß sein kann. Dagegen wäre für $\delta < 1$ eine Überdeckung mit mindestens zwei Mengen notwendig, so dass $\eta_{1/2}^{1/2} > 1$ sein muss. Die selbe Betrachtung angewendet auf Teilintervalle zeigt, dass wir hier $\delta > 0$ beliebig klein wählen müssen. Da für kleinere δ das Infimum über eine kleinere Auswahl an Mengen genommen wird und daher größer sein muss, ist η_δ^s monoton wachsend für $\delta \rightarrow 0$. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 8.7 (Hausdorff-Maß). Sei (S, d) ein metrischer Raum. Für $s \geq 0$ heißt dann

$$\eta^s(A) := \sup_{\delta > 0} \eta_\delta^s(A)$$

das *Hausdorff-Maß der Dimension s* von A .

Durch das Konstruktionsprinzip erhalten wir zunächst ein äußeres Maß.

Satz 8.8. Für alle $s \geq 0$ ist η^s ein äußeres Maß auf S .

Beweis. Genau wie im Beweis von [Satz 8.3](#) zeigt man, dass η_δ^s für alle $\delta > 0$ ein äußeres Maß ist (*warum?*). Daraus folgt sofort

$$\eta^s(\emptyset) = \sup_{\delta > 0} \eta_\delta^s(\emptyset) = \sup_{\delta > 0} 0 = 0.$$

Seien nun $A, A_1, A_2, \dots \subset S$ mit $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$. Dann folgt für alle $\delta > 0$

$$\eta_\delta^s(A) \leq \sum_{n \geq 1} \eta_\delta^s(A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \eta^s(A_n),$$

und Supremum über alle $\delta > 0$ ergibt die Behauptung. □

Bevor wir die Frage beantworten, welche Mengen Hausdorff-messbar sind, betrachten wir einige einfache Beispiele.

Beispiel 8.9. Sei $S = \mathbb{R}^d$ und

- (i) $A = \{x_1, \dots, x_N\}$. Dann enthält für $\delta < \inf_{1 \leq i, j \leq N} |x_i - x_j|$ jede Menge A_n in einer Überdeckung von A höchstens ein x_i . Insbesondere muss die minimale Überdeckung dann aus genau N Mengen bestehen. Für $s = 0$ gilt daher

$$\eta_\delta^s(A) = \sum_{n=1}^N \text{diam}(A_n)^0 = N$$

und damit auch

$$\eta^s(A) = \sup_{\delta > 0} N = N = |A|$$

(der Anzahl der Elemente von A). Für $s > 0$ wählen wir dagegen $A_n = B_r(x_n)$ (die abgeschlossene Kugel um x_n mit Radius $r > 0$) für $n = 1, \dots, N$, da diese für alle $r > 0$ die Menge A überdecken. Daraus folgt

$$\eta_\delta^s(A) \leq \inf_{r > 0} \sum_{n=1}^N r^s = 0$$

und damit auch $\eta^s(A) = 0$.

- (ii) $A = [a, b] := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\frac{|b-a|}{\delta} = N \in \mathbb{N}$ gilt und wir daher A mit genau N Mengen vom Durchmesser δ (der jeweils auf $[a, b]$ liegt) überdecken können. Daraus folgt

$$\eta_\delta^s(A) \leq \sum_{n=1}^N \delta^s = \frac{|b-a|}{\delta} \delta^s = |b-a| \delta^{s-1}.$$

Mit deutlich mehr Aufwand als in (i) zeigt man, dass dies auch eine untere Schranke ist (d. h. keine besseren Überdeckungen existieren können). Also ist

$$\eta^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} |b-a| \delta^{s-1} = \begin{cases} \infty & \text{für } s < 1, \\ |b-a| & \text{für } s = 1, \\ 0 & \text{für } s > 1. \end{cases}$$

Allgemein kann man zeigen, dass für jede Kurve mit einer sinnvollen Länge (d. h. *rektifizierbare* Kurven) das Hausdorff-Maß der Dimension 1 mit dieser Länge übereinstimmt.

- (iii) Analog berechnet man das Hausdorff-Maß für Quadrate, Würfel, etc. (die mit $O(\delta^2)$ bzw. $O(\delta^3)$ Mengen vom Durchmesser δ minimal überdeckt werden können).

Wir zeigen nun, dass Borel-Mengen η^s -messbar sind. Dazu verwenden wir das folgende

Resultat.

Lemma 8.10. Sei (S, d) ein metrischer Raum mit Borel-Algebra $\mathcal{B}$ und η ein äußeres Maß auf S . Gilt

$$\eta(A \cup A') = \eta(A) + \eta(A')$$

für alle $A, A' \subset S$ mit

$$\text{dist}(A, A') := \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in A'\} > 0$$

(d. h. η ist ein metrisches äußeres Maß), dann gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_\eta$.

Den Beweis findet man z. B. in [Brokate & Kersting 2019, Satz 11.5] (dort für $S = \mathbb{R}^d$, aber er gilt wortwörtlich für beliebige metrische Räume).

Satz 8.11. Sei (S, d) ein metrischer Raum mit Borel-Algebra $\mathcal{B}$ und $s \geq 0$. Dann ist η^s ein Maß auf $\mathcal{B}$.

Beweis. Nach Satz 8.2 zusammen mit Satz 8.8 ist η^s ein Maß auf $\mathcal{A}_{\eta^s}$; wir müssen wegen Lemma 8.10 daher nur noch zeigen, dass η^s metrisch ist. Seien dafür $A, A' \subset S$ mit $\text{dist}(A, A') > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{1}{2}d(A, A')$. Seien nun $A_1, A_2, \dots \subset S$ mit $A \cup A' \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$ und $\text{diam}(A_n) \leq \delta$. Aus der letzten Eigenschaft folgt nach Wahl von δ , dass jedes A_n nur mit höchstens einer der beiden Mengen A, A' nichtleeren Schnitt haben kann. Also können wir die Folge $\{A_n\}_{n \geq 1}$ zerlegen in zwei Teilfolgen $\{A_{n_k}\}_{k \geq 1}$ und $\{A_{n_{k'}}\}_{k' \geq 1}$ mit

$$A \subset \bigcup_{k \geq 1} A_{n_k}, \quad A' \subset \bigcup_{k' \geq 1} A_{n_{k'}}.$$

Daraus folgt

$$\eta_\delta^s(A) + \eta_\delta^s(A') \leq \sum_{k \geq 1} \text{diam}(A_{n_k})^s + \sum_{k' \geq 1} \text{diam}(A_{n_{k'}})^s \leq \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^s.$$

Infimum über alle solchen Überdeckungen von $A \cup A'$ ergibt dann

$$\eta_\delta^s(A) + \eta_\delta^s(A') \leq \eta_\delta^s(A \cup A'),$$

Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ ergibt dann

$$\eta^s(A) + \eta^s(A') \leq \eta^s(A \cup A').$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt wie üblich aus der Subadditivität des äußeren Maßes η^s . $\square$

Wir untersuchen nun, wie $\eta^s(A)$ für festes $A \subset S$ von s abhängt. Wir haben schon in Beispiel 8.9 (ii) gesehen, dass es einen “Sprung” von $\eta^s(A) = 0$ auf $\eta^s(A) = \infty$ geben kann. Dies ist stets der Fall.

Lemma 8.12. Sei $A \subset S$ und $s \geq 0$. Dann gilt:

- (i) $\eta^s(A) < \infty$ impliziert $\eta^t(A) = 0$ für alle $t > s$,
- (ii) $\eta^s(A) > 0$ impliziert $\eta^t(A) = \infty$ für alle $t < s$.

Beweis. Ist $\eta^s(A) < \infty$, so existiert nach Definition für alle $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $A_1, A_2, \dots \subset S$ mit $\text{diam}(A_n) \leq \delta$, $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$, und

$$\sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^s \leq \eta_\delta^s(A) + \varepsilon.$$

Daraus folgt für $t > s$

$$\sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^t \leq \delta^{t-s} \sum_{n \geq 1} \text{diam}(A_n)^s \leq \delta^{t-s} (\eta_\delta^s(A) + \varepsilon).$$

Abschätzen der linken Seite durch das Infimum über alle Überdeckungen und der rechten Seite durch das Supremum über alle $\delta > 0$ ergibt dann

$$\eta_\delta^s(A) \leq \delta^{t-s} (\eta^s(A) + \varepsilon) \rightarrow 0$$

für $\delta \rightarrow 0$ wegen $\eta^s(A) < \infty$ nach Annahme. Dies zeigt Aussage (i).

Aussage (ii) folgt nun aus (i) durch Kontraposition. □

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 8.13 (Hausdorff-Dimension). Sei (S, d) ein metrischer Raum und $A \subset S$. Dann heißt

$$h_A := \inf \{s \geq 0 \mid \eta^s(A) = 0\} = \sup \{s \geq 0 \mid \eta^s(A) = \infty\}$$

die *Hausdorff-Dimension* von A .

Gilt $\eta^s(A) \in (0, \infty)$ für ein $s \geq 0$, so folgt aus Lemma 8.12 sofort $h_A = s$. So zeigt Beispiel 8.9, dass endliche Punktmengen Hausdorff-Dimension 0 und Kurven Hausdorff-Dimension 1 haben; allgemein gilt, dass falls man einer Mengen eine “intuitive” Dimension zuordnen kann, diese gleich der Hausdorff-Dimension ist. In der *geometrischen Maßtheorie* verwendet man (unter anderem) die Hausdorff-Dimension, um geometrische Eigenschaften mit analytischen Methoden zu untersuchen; siehe z. B. [Federer 1969; Lorenz 2016].

Speziell für den Fall $S = \mathbb{R}^d$ kann man zusätzliche Eigenschaften zeigen. Direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Metrik $d(x, y) = |x - y|_2$ in $\mathbb{R}^d$ erhält man Translationsinvarianz und Skalierungsverhalten des Hausdorff-Maßes.

Lemma 8.14. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ und $s \geq 0$. Dann gilt:

- (i) $\eta^s(A + v) = \eta^s(A)$ für $A + v := \{x + v \mid x \in A\}$ und alle $v \in \mathbb{R}^d$,
 (ii) $\eta^s(cA) = c^s \eta^s(A)$ für $cA := \{cx \mid x \in A\}$ und alle $c > 0$.

Weiter ist die Raumdimension eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension.

Lemma 8.15. Für alle $A \subset \mathbb{R}^d$ ist $0 \leq h_A \leq d$.

Beweis. Die Nichtnegativität ist klar. Für die Beschränktheit betrachten wir zunächst den Einheitswürfel $[0, 1]^d$, der sich zerlegen lässt in n^d Teilwürfel mit Kantenlänge $\frac{1}{n}$ und Durchmesser $\frac{\sqrt{d}}{n}$. Daraus folgt für $\delta_n = \frac{\sqrt{d}}{n} > 0$

$$\eta_{\delta_n}^d([0, 1]^d) \leq n^d \left(\frac{\sqrt{d}}{n} \right)^d = d^{d/2}$$

und damit für $n \rightarrow \infty$ auch $\eta^d([0, 1]^d) < \infty$. Aus Lemma 8.12 folgt daher $\eta^{d+\varepsilon}([0, 1]^d) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Da $\eta^{s+\varepsilon}$ nach Satz 8.8 ein Maß auf der Borel-Algebra und damit σ -additiv ist und sich der $\mathbb{R}^d$ mit abzählbar vielen Einheitswürfeln ausschöpfen lässt, folgt mit der Translationsinvarianz $\eta^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) = 0$. Aus der Monotonie von $\eta^{s+\varepsilon}$ als äußeres Maß folgt daraus auch $\eta^{s+\varepsilon}(A) = 0$ für alle $A \subset \mathbb{R}^d$. Dies zeigt $h_A \leq d$. $\square$

Tatsächlich kann man zeigen, dass $\eta^d = c_d \lambda^d$ gilt für eine Konstante $c_d > 0$, die vom Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel abhängt; siehe z. B. [Elstrodt 2018, Satz III.2.9, Satz V.1.16]. (Oft wird diese Konstante direkt in der Definition des Hausdorff-Maßes verwendet, um $\eta^d = \lambda^d$ zu erhalten.)

Wir schließen mit einem Beispiel einer Menge, die keine ganzzahlige Hausdorff-Dimension hat.

Beispiel 8.16 (Cantor-Menge). Die Cantor-Menge $C \subset \mathbb{R}$ entsteht aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$ durch rekursives Entfernen des mittleren Drittels aus jedem Intervall. Man erhält dadurch eine Folge von Mengen

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1], \\ C_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \\ C_2 &= ([0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]) \cup ([\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]) \end{aligned}$$

und so weiter und setzt

$$C := \bigcap_{n \geq 0} C_n.$$

Diese Mengen sind *selbstähnlich*, d. h. C_{n+1} besteht aus zwei skalierten und verschobenen Kopien von C_n ; konkret gilt $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}$. Man kann nun zeigen, dass dann

auch gilt

$$C = \left(\frac{1}{3}C\right) \cup \left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right).$$

Wegen

$$\text{dist}\left(\frac{1}{3}C, \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0$$

folgt aus [Lemma 8.10](#) und [Lemma 8.14](#)

$$\eta^s(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \eta^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \eta^s(C) = \frac{2}{3^s} \eta^s(C).$$

Angenommen, es wäre $\eta^s(C) \in (0, \infty)$. Dann können wir diese Gleichung nach s auflösen und erhalten

$$h_C = s = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,631.$$

Der Beweis, dass für diese Wahl von s tatsächlich $\frac{1}{2} \leq \eta^s(C) \leq 1$ gilt, ist deutlich aufwändiger; siehe z. B. [\[Folland 1999, Chapter 11.3\]](#).

Andere selbstähnliche Mengen wie die Koch-Kurve oder das Sierpiński-Dreieck haben andere, ebenfalls nicht-ganzzahlige Hausdorff-Dimensionen.

LITERATUR

- H. BAUER (1992), *Maß- und Integrationstheorie*, 2. Aufl., Berlin: Walter de Gruyter.
- M. BROKATE & G. KERSTING (2019), *Maß und Integral*, 2. Aufl., Mathematik Kompakt, Birkhäuser, Cham, DOI: [10.1007/978-3-0348-0988-7](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0988-7).
- J. ELSTRODT (2018), *Maß- und Integrationstheorie*, 8. Aufl., Springer Spektrum, Heidelberg, DOI: [10.1007/978-3-662-57939-8](https://doi.org/10.1007/978-3-662-57939-8).
- H. FEDERER (1969), *Geometric Measure Theory*, Bd. Band 153, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag New York, Inc., New York.
- G. B. FOLLAND (1999), *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, 2. Aufl., Wiley, New York.
- A. KLENKE (2020), *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Aufl., Springer Spektrum, Berlin, DOI: [10.1007/978-3-662-62089-2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-62089-2).
- D. LORENZ (2016), *Measure Theory, With a Geometric Touch*, Vorlesungsskript, TU Braunschweig, URL: <https://www.ams.org/open-math-notes/omn-view-listing?listingId=110655>.
- T. TAO (2011), *An Introduction to Measure Theory*, Bd. 126, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, DOI: [10.1090/gsm/126](https://doi.org/10.1090/gsm/126).
- G. TOMKOWICZ & S. WAGON (2016), *The Banach–Tarski Paradox*, 2. Aufl., Bd. 163, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, DOI: [10.1017/cb09781107337145](https://doi.org/10.1017/cb09781107337145).
- D. WERNER (2009), *Einführung in die höhere Analysis, Topologische Räume, Funktionentheorie, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis*, 2. Aufl., Springer, Berlin, DOI: [10.1007/978-3-540-79696-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-79696-1).

STICHWORTVERZEICHNIS

- σ -Additivität, 14
- σ -Algebra, 1
 - erzeugte, 3, 4
 - Produkt-, 5
 - Spur-, 2
- Approximation
 - monotone, 12
 - äußere, 62
- Bildmaß, 17
- Borel-Algebra, 6
- Borel-Funktion, 6
- Borel-Maß, 65
- Borel-Menge, 6
- Darstellungssatz, 66
- Dichte, 45
- Doppelintegral, 52
- Durchmesser, 69
- Dynkin-System, 18
- Erzeuger, 3
- fast überall, 21
- Fortsetzungssatz, 62
- Funktion
 - Borel-messbar, 6
 - charakteristische, 9
 - Dirichlet, 22
 - einfach, 23
 - integrierbar, 31
 - messbar, 2
 - nichtnegativ, 12
 - numerisch, 9
- Funktional, 66
 - linear, 66
 - positiv, 66
 - stetig, 66
- Halbnorm, 41
- Hausdorff-Dimension, 73
- Hausdorff-Maß, 70
- Identitätssatz, 3
- Kern, 58
- Konvergenz
 - fast überall, 22
 - im p -ten Mittel, 38
 - im Maß, 42
- Kugel, 6
- Lebesgue-Borel-Algebra, 65
- Lebesgue-Integral, 23, 31
- Lebesgue-Maß, 19
- Lemma von Fatou, 26
- Majorante, integrierbar, 32
- Maß, 14
 - σ -endlich, 14
 - σ -stetig, 15
 - σ -subadditiv, 15
 - absolutstetig, 47
 - Dirac, 15
 - diskret, 15
 - endlich, 14
 - Lebesgue, 58
 - Lebesgue-, 19
 - metrisch, 72

- signiert, 47
- singulär, 47
- äußeres, 60
- Maßraum, 14
- Menge
 - abgeschlossen, 6
 - Borel-messbar, 6
 - messbar, 1
 - messbar (von außen), 60
 - offen, 6
 - selbstähnlich, 74
- Messbarkeitskriterium, 4
- Monotonieprinzip, 13
- Nullmenge, 21
- Produktmaß, 57
- Produktraum, 5
- Projektionsabbildung, 5
- Quader, messbar, 5
- Radon-Nikodým-Ableitung, 45
- Raum, messbar, 1
- Satz von
 - Beppo Levi, 25
 - Caratheodory, 61
 - der dominierten Konvergenz, 32
 - der monotonen Konvergenz, 25
 - Fubini, 55
 - Lebesgue, 32
 - Radon-Nikodým, 49
 - Riesz, 66
 - Riesz-Fischer, 40
 - Tonelli, 54
- schnittstabil, 17
- Supremum, essentielles, 38
- Ungleichung
 - Hölder-, 33
 - Jensen-, 35
 - Markov, 24
 - Minkowski-, 34
 - Young-, 34
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 14
- Zerlegung
 - Hahn-, 47
 - Lebesgue-, 50
- Zählmaß, 15