INVERSE PROBLEME

Vorlesungsskript, Wintersemester 2016/17

Christian Clason

Stand vom 3. Juni 2017

Fakultät für Mathematik
Universität Duisburg-Essen

INHALTSVERZEICHNIS

ÜBERBLICK

Inverse Probleme treten überall dort auf, wo sich gesuchte Größen nicht durch direkte Messung ermitteln lassen, sondern nur durch Abgleich von Messungen und mathematischen Modellen. Beispiele finden sich in der biomedizinischen Bildgebung, der zerstörungsfreien Prüfung von Werkstoffen und der Kalibrierung von Finanzmodellen. Der Name „inverses Problem" rührt daher, dass es oft ein „direktes Problem" enthält: nämlich jenes mathematische Modell, das die gesuchte Größe mit der Messung verknüpft. Aus mathematischer Sicht ist jedoch relevanter, dass es sich hierbei um sogenannte *schlecht gestellte* Probleme handelt, die mit den Standard-Methoden zur Lösung (nicht)linearer Gleichungen nicht behandelt werden können.[1]

Die mathematische Theorie der inversen Probleme ist daher ein Teilgebiet der Funktionalanalysis: so, wie sich diese mit der Frage beschäftigt, wann eine Gleichung $F(x) = y$ in einem unendlichdimensionalen Vektorraum eine eindeutige Lösung x besitzt, die stetig von y abhängt, werden wir in dieser Vorlesung untersuchen, unter welchen Bedingungen dies nicht der Fall ist, und wie man dann zumindest eine sinnvolle Näherung an x bekommt. Dies entspricht im Wesentlichen dem Schritt von regulären zu inkonsistenten, unterbestimmten, und schlecht konditionierten linearen Gleichungssystemen.

Dieses Skriptum basiert vor allem auf den folgenden Werken:

[1] M. Burger (2007), Inverse Problems, Vorlesungsskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Münster, url: http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/IP_WS07/skript.pdf

[2] H. W. Engl, M. Hanke u. a. (1996), *Regularization of Inverse Problems*, Bd. 375, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, doi: 10.1007/978-94-009-1740-8

[3] B. von Harrach (2014), Regularisierung Inverser Probleme, Vorlesungsskript, Fachbereich Mathematik, Universität Stuttgart, url: http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/~harrach/lehre/Regularisierung.pdf

[1] Sonst wäre auch keine eigene Vorlesung notwendig. Tatsächlich wäre der Titel „Schlecht gestellte Probleme" passender; die Bezeichnung „Inverse Probleme" hat sich dennoch durchgesetzt.

[4] T. Hohage (2002), Inverse Problems, Vorlesungsskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen

[5] K. Ito & B. Jin (2014), *Inverse Problems: Tikhonov Theory and Algorithms*, Bd. 22, Series on Applied Mathematics, Singapore: World Scientific, doi: 10.1142/9789814596206_0001

[6] B. Kaltenbacher u. a. (2008), *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*, Bd. 6, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, Berlin: De Gruyter, doi: 10.1515/9783110208276

[7] A. Kirsch (2011), *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, 2. Aufl., Springer, New York, doi: 10.1007/978-1-4419-8474-6

[8] A. K. Louis (1989), *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, doi: 10.1007/978-3-322-84808-6

[9] A. Rieder (2003), *Keine Probleme mit inversen Problemen*, Eine Einführung in ihre stabile Lösung, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, doi: 10.1007/978-3-322-80234-7

Teil I

FUNKTIONALANALYTISCHE GRUNDLAGEN

1 LINEARE OPERATOREN IN NORMIERTEN RÄUMEN

In diesem und dem nächsten Kapitel stellen wir die für diese Vorlesung wesentlichen Begriffe, Notationen und Resultate zusammen. Für Beweise wird auf die Standardliteratur verwiesen, z. B. auf [Alt 2012; Werner 2011], oder auf [Clason 2015].

1.1 NORMIERTE RÄUME

Im Folgenden bezeichne X einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, wobei wir uns hier stets auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ heißt *Norm* (auf X), falls für alle $x \in X$ gilt

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $y \in X$,

(iii) $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0 \in X$.

Zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ heißen *äquivalent*, falls $c_1, c_2 > 0$ existieren mit

$$c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2 \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Ist X endlichdimensional, so sind alle Normen auf X äquivalent. Die Konstanten c_1, c_2 hängen dann jedoch von der Dimension von X ab; die Vermeidung solcher dimensionsabhängiger Konstanten ist einer der Gründe, warum wir inverse Probleme in einem unendlichdimensionalen Funktionenraum betrachten wollen.

Beispiel 1.1. (i) Auf $X = \mathbb{R}^N$ werden Normen definiert durch

$$\begin{aligned}
\|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty,\\
\|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,N} |x_i|.
\end{aligned}$$

(ii) Auf $X = \ell^p$ (dem Raum der reellen Folgen, auf dem folgende Ausdrücke endlich sind) sind Normen definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,\infty} |x_i|.$$

(iii) Auf $X = L^p(\Omega)$ (dem Raum der messbaren reellen Funktionen, auf dem folgende Ausdrücke endlich sind) sind Normen definiert durch

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

(iv) Auf $X = C(\overline{\Omega})$ (dem Raum der Funktionen auf Ω, die stetig auf den Rand fortgesetzt werden können) ist eine Norm definiert durch

$$\|u\|_C = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Auf ähnliche Weise definiert man den Banachraum $C^k(\overline{\Omega})$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Norm $\|u\|_{C^k} = \sum_{j=0}^k \|u^{(j)}\|_C$.

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so bezeichnet man das Paar $(X, \|\cdot\|)$ als *normierten Raum*, und schreibt in diesem Fall oft $\|\cdot\|_X$. Ist die Norm kanonisch (etwa in Beispiel 1.1 (ii)–(iv)), so wird sie oft weggelassen.

Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume mit $X \subset Y$, so heißt X *stetig eingebettet* in Y, geschrieben $X \hookrightarrow Y$, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Eine Norm vermittelt auf direkte Weise einen Konvergenzbegriff, die sogenannte *starke Konvergenz*: Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert (stark in X) gegen ein $x \in X$, geschrieben $x_n \longrightarrow x$, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0.$$

Eine Teilmenge $U \subset X$ nennen wir

- *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ auch der Grenzwert $x \in U$ liegt;

- *kompakt*, falls jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in U$ besitzt;
- *dicht* in X, falls für alle $x \in X$ eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $x_n \to x$ existiert.

Die Vereinigung von U mit der Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen in U bezeichnen wir als ihren *Abschluss* $\overline{U}$; offensichtlich ist U dicht in $\overline{U}$.

Ein normierter Raum X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert; man nennt dann X auch *Banachraum*. Alle Räume in Beispiel 1.1 sind Banachräume. Ist X ein unvollständiger normierter Raum, so bezeichnen wir $\overline{X}$ als *Vervollständigung* von X (bezüglich der Norm $\|\cdot\|_X$).

Schließlich definieren wir für späteren Gebrauch für $x \in X$ und $r > 0$

- die *offene Kugel* $U_r(x) := \{z \in X : \|x - z\|_X < r\}$ und
- die *abgeschlossene Kugel* $B_r(x) := \{z \in X : \|x - z\|_X \le r\}$.

Die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius 1 bezeichnet man auch als *Einheitskugel* B_X. Eine Menge $U \subset X$ heißt

- *offen*, falls für alle $x \in U$ ein $r > 0$ existiert mit $U_r(x) \subset U$ (d. h. alle $x \in U$ *innere Punkte* von U sind);
- *beschränkt*, falls sie in einer abgeschlossenen Kugel $B_r(0)$ für ein $r > 0$ enthalten ist;
- *konvex*, falls für $x, y \in U$ auch $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ für alle $\lambda \in [0,1]$ gilt.

In normierten Räumen gilt, dass das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist und umgekehrt (d. h. die abgeschlossenen Mengen im Sinne der Topologie sind genau die (Folgen-)abgeschlossenen Mengen im Sinne unserer Definition). Sowohl offene als auch abgeschlossene Kugeln sind wegen der Norm-Axiome konvex.

1.2 BESCHRÄNKTE OPERATOREN

Wir betrachten nun Abbildungen zwischen normierten Räumen. Seien im Folgenden stets $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $U \subset X$, und $F : U \to Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit

- $\mathcal{D}(F) := U$ den *Definitionsbereich* (englisch „domain“) von F;
- $\mathcal{N}(F) := \{x \in U : F(x) = 0\}$ den *Kern* (englisch „kernel“ oder „null space“) von F;
- $\mathcal{R}(F) := \{F(x) \in Y : x \in U\}$ das *Bild* (englisch „range“) von F.

Wir sagen, F ist

- *stetig* in $x \in U$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit
$$\|F(x) - F(z)\|_Y \le \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in U \text{ mit } \|x - z\|_X \le \delta;$$
- *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert (genannt *Lipschitz-Konstante*) mit
$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \le L\|x_1 - x_2\|_X \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in U.$$

Eine Abbildung $F : X \to Y$ ist also genau dann stetig, wenn aus $x_n \to x$ auch $F(x_n) \to F(x)$ folgt, und *abgeschlossen*, wenn für $x_n \to x$ und $F(x_n) \to y$ folgt, dass $F(x) = y$ ist.

Ist $F : X \to Y$ linear (d. h. $F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in X$), so ist die Stetigkeit äquivalent mit der Bedingung, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit
$$\|Fx\|_Y \le C\|x\|_X \qquad \text{für alle } x \in X.$$
Stetige lineare Abbildungen nennt man daher auch *beschränkt*; man spricht auch von einem beschränkten linearen *Operator*. (Diese bezeichnen wir in Folge mit T, um dies zu verdeutlichen.) Ist Y vollständing, so ist der Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ der beschränkten linearen Operatoren ein Banachraum versehen mit der *Operatornorm*
$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y$$
(die gleich der minimalen Konstante C in der Definition der Stetigkeit ist).

Wie in der linearen Algebra bezeichnet man T als

- *injektiv*, wenn $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ ist;
- *surjektiv*, wenn $\mathcal{R}(T) = Y$ ist;
- *bijektiv*, wenn T injektiv und surjektiv ist.

Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv, dann ist die Inverse $T^{-1} : Y \to X$ stetig genau dann, wenn ein $c > 0$ existiert mit
$$c\|x\|_X \le \|Tx\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X;$$
in diesem Fall gilt $\|T^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = c^{-1}$ für das größte solche c. Wann dies der Fall ist, besagen die folgenden Hauptsätze der Funktionalanalysis (die alle mehr oder weniger direkt aus dem Satz von der offenen Abbildung folgen).

Satz 1.2 (Satz von der stetigen Inversen). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} : Y \to X$ stetig.*

Für inverse Probleme besonders relevant ist der Fall, dass T zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist. Dann hätte man gerne zumindest auf dem Bild von T eine stetige Inverse; dass dies im Allgemeinen nicht mehr der Fall ist, stellt die Kernschwierigkeit bei unendlichdimensionalen inversen Problemen dar.

Satz 1.3 (Satz vom abgeschlossenen Bild). *Seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ injektiv. Dann ist $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ stetig genau dann, wenn $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist.*

Das Trio komplett macht der folgende Satz.

Satz 1.4 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Seien X, Y Banachräume. Dann ist $T : X \to Y$ stetig genau dann, wenn T abgeschlossen ist.*

Wir betrachten nun Folgen linearer Operatoren. Dafür unterscheiden wir zwei Konvergenzbegriffe: Eine Folge $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ konvergiert gegen $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

(i) *punktweise*, wenn $T_n x \to Tx$ (stark in Y) für alle $x \in X$ konvergiert;

(ii) *gleichmäßig*, wenn $T_n \to T$ (stark in $\mathcal{L}(X, Y)$) konvergiert.

Gleichmäßige Konvergenz impliziert dabei punktweise Konvergenz; schwächere Bedingungen liefert ein weiterer Hauptsatz der Funktionalanalysis.

Satz 1.5 (Satz von Banach–Steinhaus). *Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum, und $\{T_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ eine Familie punktweise beschränkter Operatoren, d. h. für alle $x \in X$ existiert eine Konstante $M_x > 0$ mit $\sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y \leq M_x$. Dann ist*

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Folgerung 1.6. *Seien X, Y Banachräume und $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Dann sind äquivalent*

(i) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen in X;

(ii) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf X;

(iii) $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf einer dichten Teilmenge $U \subset X$ und es gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Folgerung 1.7. *Seien X, Y Banachräume und $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Konvergiert T_n punktweise gegen ein $T : X \to Y$, so ist T beschränkt.*

2 KOMPAKTE OPERATOREN IN HILBERTRÄUMEN

Zwar kann man inverse Probleme in Banachräumen untersuchen, in Hilberträumen lässt sich die Theorie für lineare Operatoren aber geschlossen darstellen. Dort wird auch die Analogie zu unterbestimmten und schlecht konditionierten Gleichungssystemen besonders deutlich.

2.1 SKALARPRODUKT UND SCHWACHE KONVERGENZ

Hilberträume zeichnen sich dadurch aus, dass eine zusätzliche Struktur definiert ist: Eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ auf dem Vektorraum X über $\mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt*, falls gilt

(i) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\,(x, z) + \beta\,(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(ii) $(x, y) = (y, x)$ für alle $x, y \in X$;

(iii) $(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$ mit $(x, x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.

Ein Banachraum mit Skalarprodukt $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ wird *Hilbertraum* genannt; ist das Skalarprodukt kanonisch, lässt man es weg. Durch das Skalarprodukt wird eine Norm

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X}$$

induziert, die der *Cauchy–Schwarz-Ungleichung* gehorcht:

$$|\,(x, y)_X\,| \leq \|x\|_X \|y\|_X.$$

Beispiel 1.1 (i–iii) für $p = 2$ ist jeweils ein Hilbertraum, wobei das Skalarprodukt gegeben ist durch

(i) für $X = \mathbb{R}^N$: $\quad (x, y)_X = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i,$

(ii) für $X = \ell^2$: $\quad (x, y)_X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$

(iii) für $X = L^2(\Omega)$: $\quad (u, v)_X = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$

In allen Fällen induziert das Skalarprodukt die kanonische Norm.

Durch das Skalarprodukt wird ein weiterer Konvergenzbegriff erzeugt: die *schwache Konvergenz*. Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ konvergiert schwach (in X) gegen $x \in X$, geschrieben $x_n \rightharpoonup x$, falls gilt

$$(x_n, z)_X \to (x, z)_X \qquad \text{für alle } z \in X.$$

Dieser Begriff verallgemeinert die koordinatenweise Konvergenz im $\mathbb{R}^N$; in endlichdimensionalen Räumen fallen also starke und schwache Konvergenz zusammen. In unendlichdimensionalen Räumen impliziert starke Konvergenz die schwache, aber nicht umgekehrt. Konvergiert eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch schwach gegen ein $x \in X$, und gilt zusätzlich $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$, so konvergiert x_n auch stark gegen x. Es gilt außerdem, dass die Norm *schwach unterhalbstetig* ist: Konvergiert $x_n \rightharpoonup x$, so ist

$$\|x\|_X \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

Dieser Konvergenzbegriff ist vor allem deshalb nützlich, weil für ihn der Satz von Bolzano–Weierstrass gilt: Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge. Umgekehrt ist jede schwach konvergente Folge beschränkt.

Wir betrachten nun lineare Operatoren $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ zwischen Hilberträumen X, Y. Von besonderer Bedeutung ist dabei der Spezialfall $Y = \mathbb{R}$ sein, das heißt der Raum $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ der *linearen stetigen Funktionale* auf X. Diese lassen sich mit Elementen von X identifizieren.

Satz 2.1 (Riesz–Fischer). *Sei X ein Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $\lambda \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ genau ein $z_\lambda \in X$ mit $\|\lambda\|_{\mathcal{L}(X,\mathbb{R})} = \|z_\lambda\|_X$ und*

$$\lambda(x) = (z_\lambda, x)_X \qquad \textit{für alle } x \in X.$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann für jeden linearen Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein *adjungierter Operator* $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ definiert werden durch

$$(T^* y, x)_X = (Tx, y)_Y \qquad \text{für alle } x \in X, y \in Y,$$

für den gilt

(i) $(T^*)^* = T$;

(ii) $\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$;

(iii) $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Ist $T^* = T$, so nennt man T *selbstadjungiert*.

2.2 ORTHOGONALITÄT UND ORTHOGONALSYSTEME

Ein Skalarprodukt vermittelt den Begriff der *Orthogonalität*: Ist X ein Hilbertraum, so nennt man $x, y \in X$ *orthogonal*, falls $(x, y)_X = 0$ gilt. Für eine Teilmenge $U \subset X$ heißt

$$U^\perp := \{x \in X : (x, u)_X = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U in X; direkt aus der Definition folgt, dass $U^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum ist. Insbesondere ist $X^\perp = \{0\}$.

Weiterhin folgt, dass $U \subset (U^\perp)^\perp$ ist. Ist U ein abgeschlossener Unterraum, so gilt sogar $U = (U^\perp)^\perp$ (und damit $\{0\}^\perp = X$). In diesem Fall existiert die *Orthogonalzerlegung*

$$X = U \oplus U^\perp,$$

d. h. jedes Element $x \in X$ kann auf eindeutige Weise dargestellt werden als

$$x = u + u_\perp, \qquad u \in U,\ u_\perp \in U^\perp.$$

Durch die Zuordnung $x \mapsto u$ wird ein linearer Operator $P_U \in \mathcal{L}(X, X)$ definiert, den man *Orthogonalprojektion* auf U nennt. Für diesen gilt:

(i) P_U ist selbstadjungiert;

(ii) $\|P_U\|_{\mathcal{L}(X,U)} = 1$;

(iii) $\mathrm{Id} - P_U = P_{U^\perp}$;

(iv) $\|x - P_U x\|_X = \min_{u \in U} \|x - u\|_X$;

(v) $z = P_U x$ genau dann, wenn $z \in U$ und $z - x \in U^\perp$.

Ist der Unterraum U dagegen nicht abgeschlossen, gilt lediglich $(U^\perp)^\perp = \overline{U} \supset U$. Für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ gilt daher

(i) $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$ und damit $\mathcal{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$;

(ii) $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$ und damit $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$.

Insbesondere ist der Kern einer stetigen linearen Abbildung stets abgeschlossen; außerdem ist T injektiv genau dann, wenn $\mathcal{R}(T^*)$ dicht in X liegt.

Eine Menge $U \subset X$, deren Elemente paarweise orthogonal sind, heißt *Orthogonalsystem*. Gilt sogar für alle $x, y \in U$, dass

$$(x, y)_X = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so heißt U *Orthonormalsystem.* Ein Orthonormalsystem ist *vollständig*, falls kein Orthonormalsystem $V \subset X$ mit $U \subsetneq V$ existiert. Jedes Orthonormalsystem $U \subset X$ erfüllt die *Besselsche Ungleichung*:

$$\sum_{y\in U} |(x,y)_X|^2 \leq \|x\|_X^2 \qquad \text{für alle } x \in X, \tag{2.1}$$

wobei stets höchstens abzählbar viele Summanden von Null verschieden sind. Gilt sogar Gleichheit in (2.1), so nennt man U auch *Orthonormalbasis*; in diesem Fall ist U vollständig und es gilt

$$x = \sum_{y\in U} (x,y)_X\, y \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis. Ist diese höchstens abzählbar, so nennt man den Hilbertraum *separabel.* Aus der Besselschen Ungleichung folgt dann, dass die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} = U$ schwach gegen Null (aber wegen $\|u_n\|_X = 1$ nicht stark!) konvergiert. Ein Beispiel ist $X = L^2([0,1])$, welches die Orthonormalbasis $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ mit

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin(2\pi\, n\, x) & n > 0, \\ \sqrt{2}\cos(2\pi\, n\, x) & n < 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases}$$

besitzt.

Schließlich halten wir fest, dass jeder abgeschlossene Unterraum $U \subset X$ eine Orthonormalbasis $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt, mit deren Hilfe die Orthogonalprojektion auf U dargestellt werden kann als

$$P_U x = \sum_{j=1}^{\infty} \left(x, u_j\right)_X u_j.$$

2.3 DER SPEKTRALSATZ FÜR KOMPAKTE OPERATOREN

So wie man Hilberträume als naheliegende Verallgemeinerung von endlichdimensionalen Vektorräumen auffassen kann, sind kompakte Operatoren das unendlichdimensionale Analogon zu Matrizen. Ein Operator $T : X \to Y$ heißt dabei *kompakt*, wenn das Bild jeder beschränkten Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine konvergente Teilfolge $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ besitzt. Eine äquivalente Charakterisierung ist die folgende: T ist kompakt genau dann, wenn T schwach konvergente Folgen in X auf stark konvergente Folgen in Y abbildet. (Diese Eigenschaft wird auch *Vollstetigkeit* genannt.) Kompakte Operatoren bezeichnen wir in der Regel mit K.

Offensichtlich ist jeder lineare Operator kompakt, wenn Y endlichdimensional ist. Insbesondere ist die Identität $\mathrm{Id} : X \to X$ kompakt genau dann, wenn X endlichdimensional ist.

Weiterhin gilt, dass der Raum $\mathcal{K}(X,Y)$ aller kompakten Operatoren von X nach Y einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{L}(X,Y)$ (und damit einen Banachraum, versehen mit der Operatornorm) bildet. Also ist auch jeder Grenzwert von linearen Operatoren mit endlichdimensionalem Bild kompakt. Sind $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, und ist wenigstens einer der beiden Operatoren kompakt, so ist auch $S \circ T$ kompakt. Weiterhin ist T^* kompakt genau dann, wenn T kompakt ist (Satz von Schauder).

Ein kanonisches Beispiel für kompakte Operatoren sind *Integraloperatoren*. Wir betrachten $X = Y = L^2([0,1])$ und für einen gegebenen *Kern* $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$ den Operator $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, der punktweise definiert ist durch

$$[Kx](t) = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds \qquad \text{für fast alle } t \in [0,1]$$

(wobei $Kx \in L^2([0,1])$ nach dem Satz von Fubini gilt). Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz-Ungleichung und dem Satz von Fubini erhält man nun sofort

$$\|K\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \|k\|_{L^2([0,1])},$$

woraus auch folgt, dass K ein beschränkter Operator von $L^2([0,1])$ nach $L^2([0,1])$ ist.

Da $k \in L^2([0,1]^2)$ messbar ist, existiert eine Folge $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen (d. h. solche, die nur endlich viele Werte annehmen) mit $k_n \to k$ in $L^2([0,1]^2)$. Diese haben z. B. die Form

$$k_n(s,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\chi_{E_i}(s)\chi_{E_j}(t),$$

wobei χ_E die charakteristische Funktion des messbaren Intervalls $E \subset [0,1]$ ist und die E_i eine endliche disjunkte Zerlegung von $[0,1]$ bilden. Also gilt für den entsprechenden Integraloperator K_n mit k_n statt k wegen der Linearität des Integrals

$$\|K_n - K\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \|k_n - k\|_{L^2([0,1]^2)} \to 0,$$

d. h. $K_n \to K$. Nun ist aber

$$[K_n x](t) = \int_0^1 k_n(s,t)x(s)\,ds = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\int_{E_i} x(s)\,ds\right)\chi_{E_j}(t)$$

und damit $K_n x$ eine Linearkombination der $\{\chi_{E_j}\}_{1\leq j\leq n}$. Also ist K Grenzwert einer Folge $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild und daher kompakt.

Für den adjungierten Operator $K^* \in \mathcal{L}(X,X)$ rechnet man leicht nach, dass gilt

$$[K^* y](s) = \int_0^1 k(s,t)y(t)\,dt \qquad \text{für fast alle } s \in [0,1].$$

Ein Integraloperator ist also genau dann selbstadjungiert, wenn der Kern symmetrisch ist, d. h. $k(s,t) = k(t,s)$ für (fast) alle $s,t \in [0,1]$ gilt.

Durch geeignete Wahl des Kerns sieht man, dass zum Beispiel Lösungsoperatoren für partielle Differentialgleichungen oder Faltungsoperatoren – und damit eine große Klasse von praktisch relevanten Operatoren – als Integraloperatoren dargestellt werden können und daher kompakt sind.

Die Analogie zwischen kompakten Operatoren und Matrizen besteht vor allem darin, dass kompakte lineare Operatoren höchstens abzählbar viele Eigenwerte besitzen. (Dies ist für beschränkte lineare Operatoren nicht notwendigerweise der Fall!) Es gilt sogar die folgende Variante der Schur-Faktorisierung.

Satz 2.2 (Spektralsatz). *Sei X ein Hilbertraum und sei $K \in \mathcal{K}(X,X)$ selbstadjungiert. Dann existiert ein (möglicherweise endliches) Orthonormalsystem $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}/N} \subset X$ und eine (möglicherweise endliche) Nullfolge $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}/N} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit*

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty/N} \lambda_n \,(x, u_n)_X \, u_n \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Weiterhin bilden die $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}/N}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K)}$.

Setzt man $x = u_n$, so folgt sofort, dass u_n Eigenvektor zum Eigenwert λ_n ist, d. h. $Ku_n = \lambda_n u_n$ gilt. Üblicherweise ordnet man die Eigenwerte nach abfallendem Betrag, d. h.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots > 0.$$

Dann ist $\|K\|_{L(X,X)} = |\lambda_1|$.

Teil II

LINEARE INVERSE PROBLEME

3 SCHLECHT GESTELLTE OPERATORGLEICHUNGEN

Wir beginnen nun unsere Untersuchung von Operatorgleichungen, die nicht mit Standardmethoden lösbar sind. Wir betrachten zuerst einen allgemeinen (nicht notwendigerweise linearen) Operator F zwischen zwei Banachräumen X und Y. Nach Hadamard nennen wir die Gleichung $F(x) = y$ *korrekt gestellt*, wenn für alle $y \in Y$

(i) ein $x \in X$ existiert mit $F(x) = y$;

(ii) diese Lösung eindeutig ist, d. h. $z \neq x$ impliziert $F(z) \neq y$;

(iii) diese Lösung stetig von y abhängt, d. h. für alle $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $F(x_n) \to y$ gilt $x_n \to x$.

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so nennen wir die Gleichung *schlecht gestellt*.

Eine Verletzung der ersten beiden Bedingungen rührt in der Praxis oftmals von ungenügendem Wissen über die Realität her, und kann durch Erweiterung des zugrundeliegenden mathematischen Modells behandelt werden. Zum Beispiel kann das Konzept einer Lösung erweitert werden, so dass für beliebige $y \in Y$ eine verallgemeinerte Lösung existiert. Ist diese nicht eindeutig, so kann anhand von Zusatzinformationen über das gesuchte x eine bestimmte Lösung ausgewählt werden. Für endlichdimensionale Hilberträume führt dies auf das bekannte Prinzip der *Ausgleichsrechnung*; da dort alle linearen Operatoren stetig sind, ist damit im Prinzip das Problem gelöst (auch wenn die Details und insbesondere die effiziente numerische Lösung noch viel Arbeit erfordern). In unendlichdimensionalen Räumen ist dies jedoch nicht der Fall, wie das folgende Beispiel illustrieren soll.

Beispiel 3.1. Wir suchen zu gegebenem $y \in Y := L^\infty([0,1])$ die Ableitung $x := y'$. Nehmen wir an, dass $y(0) = 0$ ist, so gilt $x = y'$ genau dann, wenn

$$y(t) = \int_0^t x(s)\,ds = \int_0^1 k(s,t)x(s)\,ds \qquad \text{mit} \qquad k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s \le t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt. Also können wir das Problem in Form der Operatorgleichung $Kx = y$ schreiben.

Nehmen wir weiter an, dass die abzuleitende Funktion y nur anhand von Messwerten gegeben ist, die mit additiven Fehlern behaftet sind, d. h.

$$y = \bar{y} + \eta$$

mit $\bar{y} \in C^1([0,1])$ und $\eta \in L^\infty([0,1])$. Offensichtlich existiert die Ableitung x nur dann, wenn η differenzierbar ist. Aber selbst in diesem Fall ist das Problem nicht korrekt gestellt: Betrachte eine Folge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n \to 0$, wähle $k \in \mathbb{N}$ beliebig und setze

$$\eta_n(t) := \delta_n \sin\left(\frac{kt}{\delta_n}\right)$$

sowie $y_n := \bar{y} + \eta_n$. Dann ist $\eta_n \in C^1([0,1]) \hookrightarrow L^\infty([0,1])$ und

$$\|y_n - \bar{y}\|_{L^\infty([0,1])} = \|\eta_n\|_{L^\infty([0,1])} = \delta_n \to 0$$

aber

$$x_n(t) := y_n'(t) = \bar{y}'(t) + k\cos\left(\frac{kt}{\delta_n}\right),$$

d. h. für $\bar{x} := \bar{y}'$ gilt

$$\|\bar{x} - x_n\|_{L^\infty([0,1])} = \|\eta_n'\|_{L^\infty([0,1])} = k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Der Fehler in der Ableitung x kann also (in Abhängigkeit von k) beliebig groß sein, auch wenn der Fehler in y beliebig klein wird!

(Dagegen ist das Problem mit $Y = C^1([0,1])$ natürlich korrekt gestellt, denn dann impliziert $\|\eta_n\|_{C^1([0,1])} \to 0$ nach Definition $\|\bar{x} - x_n\|_{L^\infty([0,1])} \leq \|\eta_n\|_{C^1([0,1])} \to 0$. Die zugrundeliegende Norm entscheidet also wesentlich über die Schlechtgestelltheit.)

Beachten Sie auch, dass die drei Bedingungen für die Korrektgestelltheit nicht völlig unabhängig sind. Erfüllt $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ zum Beispiel die ersten beiden Bedingungen, so ist T bijektiv und hat daher nach Satz 1.2 eine stetige Inverse, womit auch automatisch die dritte Bedingung erfüllt ist.

3.1 VERALLGEMEINERTE INVERSE

Wir versuchen nun, die ersten beiden Bedingungen für lineare Operatoren zwischen Hilberträumen zu erfüllen, indem wir das Konzept der Lösung analog zur Ausgleichsrechnung im $\mathbb{R}^N$ verallgemeinern. Seien X, Y Hilberträume (was wir von nun an voraussetzen) und betrachte für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ die Gleichung $Tx = y$. Ist $y \notin \mathcal{R}(T)$, so hat die Gleichung keine Lösung. In diesem Fall ist es sinnvoll, ein $x \in X$ zu finden, das den Abstand $\|Tx - y\|_Y$ minimiert. Ist andererseits $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$, so existieren unendlich viele Lösungen; wir wählen in diesem Fall diejenige aus, die minimale Norm $\|x\|_X$ hat. Dies führt auf die folgende Definition.

Definition 3.2. Ein Element $x^\dagger \in X$ heißt

(i) *Ausgleichslösung* von $Tx = y$, wenn gilt

$$\|Tx^\dagger - y\|_Y = \min_{z\in X} \|Tz - y\|_Y;$$

(ii) *Minimum-Norm-Lösung* von $Tx = y$, wenn $x^\dagger$ Ausgleichslösung ist und gilt

$$\|x^\dagger\|_X = \min \{\|z\|_X : z \text{ ist Ausgleichslösung von } Tx = y\}.$$

Offensichtlich ist für T bijektiv $x = T^{-1}y$ die einzige Ausgleichs- und damit auch Minimum-Norm-Lösung. Eine Ausgleichslösung muss aber nicht existieren, falls $\mathcal{R}(T)$ nicht abgeschlossen ist (da dann das Minimum in der Definition nicht angenommen wird). Um zu untersuchen, für welche $y \in Y$ eine Minimum-Norm-Lösung existiert, führen wir einen Operator ein, der y auf die Minimum-Norm-Lösung abbildet; diesen bezeichnen wir als *verallgemeinerte Inverse* oder *Pseudoinverse.* Dazu schränken wir zuerst Definitionsbereich und Bild von T ein, so dass der Operator invertierbar wird; dann erweitern wir die Inverse des eingeschränkten Operators auf ihren maximalen Definitionsbereich.

Satz 3.3. *Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und setze*

$$\tilde{T} := T|_{\mathcal{N}(T)^\perp} : \mathcal{N}(T)^\perp \to \mathcal{R}(T).$$

Dann existiert eine eindeutige lineare Fortsetzung $T^\dagger$, genannt Moore–Penrose-Inverse*, von $\tilde{T}^{-1}$ mit*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T^\dagger) &= \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp,\\ \mathcal{N}(T^\dagger) &= \mathcal{R}(T)^\perp.\end{aligned}$$

Beweis. Wegen der Einschränkung auf $\mathcal{N}(T)^\perp$ und $\mathcal{R}(T)$ ist $\tilde{T}$ injektiv und surjektiv, daher existiert $\tilde{T}^{-1}$ und ist linear. Damit ist $T^\dagger$ auf $\mathcal{R}(T)$ wohldefiniert und linear. Für beliebige $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existieren aufgrund der Orthogonalzerlegung eindeutige $y_1 \in \mathcal{R}(T)$ und $y_2 \in \mathcal{R}(T)^\perp$ mit $y = y_1 + y_2$. Wegen $\mathcal{N}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T)^\perp$ ist also durch

$$T^\dagger y := T^\dagger y_1 + T^\dagger y_2 = T^\dagger y_1 = \tilde{T}^{-1} y_1 \tag{3.1}$$

eine eindeutige lineare Fortsetzung festgelegt. Damit ist $T^\dagger$ auf ganz $\mathcal{D}(T^\dagger)$ wohldefiniert. □

Ist T bijektiv, so gilt offensichtlich $T^\dagger = T^{-1}$. Beachte, dass $T^\dagger$ nicht unbedingt eine *stetige* Fortsetzung sein muss!

Im weiteren Verlauf brauchen wir die folgenden Eigenschaften der Moore–Penrose-Inversen.

Lemma 3.4. *Die Moore–Penrose-Inverse $T^\dagger$ erfüllt $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ sowie die „Moore–Penrose-Gleichungen“*

(i) $TT^\dagger T = T$,

(ii) $T^\dagger T T^\dagger = T^\dagger$,

(iii) $T^\dagger T = \operatorname{Id} - P_\mathcal{N}$,

(iv) $TT^\dagger = (P_{\overline{\mathcal{R}}})|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$,

wobei $P_\mathcal{N}$ und $P_{\overline{\mathcal{R}}}$ die orthogonalen Projektionen auf $\mathcal{N}(T)$ respektive $\overline{\mathcal{R}(T)}$ bezeichnen.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$. Nach Definition von $T^\dagger$ und (3.1) gilt für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$

$$T^\dagger y = \tilde{T}^{-1} P_{\overline{\mathcal{R}}} y = T^\dagger P_{\overline{\mathcal{R}}} y, \tag{3.2}$$

denn für $y \in \mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$ ist $P_{\overline{\mathcal{R}}} y \in \mathcal{R}(T)$ (und nicht nur in $\overline{\mathcal{R}(T)}$). Also ist $T^\dagger y \in \mathcal{R}(\tilde{T}^{-1}) = \mathcal{N}(T)^\perp$, d. h. $\mathcal{R}(T^\dagger) \subset \mathcal{N}(T)^\perp$. Umgekehrt gilt für alle $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$, dass $T^\dagger T x = \tilde{T}^{-1}\tilde{T} x = x$ ist, d. h. $x \in \mathcal{R}(T^\dagger)$. Also ist $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$.

Zu (iv): Für $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ folgt weiterhin aus (3.2) und $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$

$$TT^\dagger y = T\tilde{T}^{-1} P_{\overline{\mathcal{R}}} y = \tilde{T}\tilde{T}^{-1} P_{\overline{\mathcal{R}}} y = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$$

wegen $\tilde{T}^{-1} P_{\overline{\mathcal{R}}} y \in \mathcal{N}(T)^\perp$ und $T = \tilde{T}$ auf $\mathcal{N}(T)^\perp$.

Zu (iii): Nach Definition von $T^\dagger$ gilt $T^\dagger T x = \tilde{T}^{-1} T x$ für alle $x \in X$ und deshalb

$$T^\dagger T x = \tilde{T}^{-1} T\,(P_\mathcal{N} x + (\operatorname{Id} - P_\mathcal{N})x) = \tilde{T}^{-1} T P_\mathcal{N} x + \tilde{T}^{-1}\tilde{T}(\operatorname{Id} - P_\mathcal{N})x = (\operatorname{Id} - P_\mathcal{N})x.$$

Zu (ii): Einsetzen von (iv) in (3.2) ergibt

$$T^\dagger P_{\overline{\mathcal{R}}} y = T^\dagger T T^\dagger y \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(y^\dagger).$$

Zu (i): Aus (iii) folgt sofort

$$TT^\dagger T x = T(\operatorname{Id} - P_\mathcal{N})x = Tx - TP_\mathcal{N} x = Tx \qquad \text{für alle } x \in X.$$ □

Tatsächlich sind die Moore–Penrose-Gleichungen eine eindeutige Charakterisierung von $T^\dagger$.

Nun können wir zeigen, dass die Moore–Penrose-Inverse tatsächlich die Minimum-Norm-Lösung liefert.

Satz 3.5. *Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Dann hat $Tx = y$ eine eindeutige Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger \in X$, die gegeben ist durch*

$$x^\dagger = T^\dagger y.$$

Die Menge aller Ausgleichslösungen ist $x^\dagger + \mathcal{N}(T)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst Existenz einer Ausgleichslösung. Betrachte dafür die Menge

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in X : Tx = P_{\overline{\mathcal{R}}} y \right\}.$$

Wegen $P_{\overline{\mathcal{R}}} y \in \mathcal{R}(T)$ ist $\mathcal{S}$ nichtleer. Aus der Optimalität der orthogonalen Projektion folgt für alle $z \in S$, dass

$$\|Tz - y\|_Y = \|P_{\overline{\mathcal{R}}} y - y\|_Y = \min_{w \in \overline{\mathcal{R}(T)}} \|w - y\|_Y \le \|Tx - y\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X,$$

d. h. alle $z \in \mathcal{S}$ sind Ausgleichslösungen von $Tx = y$. Umgekehrt gilt für jede Ausgleichslösung $z \in X$, dass

$$\|P_{\overline{\mathcal{R}}} y - y\|_Y \le \|Tz - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Tx - y\|_Y = \min_{w \in \mathcal{R}(T)} \|w - y\|_Y \le \|P_{\overline{\mathcal{R}}} y - y\|_Y$$

wegen $P_{\overline{\mathcal{R}}} y \in \mathcal{R}(T)$, d. h. Tz ist die orthogonale Projektion von y auf $\overline{\mathcal{R}(T)}$. Zusammengefasst erhalten wir

$$\mathcal{S} = \{x \in X : x \text{ ist Ausgleichslösung von } Tx = y\} \neq \emptyset.$$

Die Ausgleichslösungen sind also genau die Lösungen der linearen Gleichung $Tx = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$, die sich eindeutig darstellen lassen als $x = \bar{x} + x_0$ mit $\bar{x} \in \mathcal{N}(T)^\perp$ und $x_0 \in \mathcal{N}(T)$. Da T injektiv auf $\mathcal{N}(T)^\perp$ ist, muss $\bar{x}$ unabhängig von x sein (sonst wäre $Tx_2 = T\bar{x}_2 \neq T\bar{x} = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$ für $x_2 = \bar{x}_2 + x_0$ mit $\bar{x}_2 \neq \bar{x}$). Wegen

$$\|x\|_X^2 = \|\bar{x} + x_0\|_X^2 = \|\bar{x}\|_X^2 + 2\,(\bar{x}, x_0)_X + \|x_0\|_X^2 = \|\bar{x}\|_X^2 + \|x_0\|_X^2 \ge \|\bar{x}\|_X^2$$

ist $x^\dagger := \bar{x}$ die Minimum-Norm-Lösung, und diese ist eindeutig.

Aus $x^\dagger \in \mathcal{N}(T)^\perp$ folgt schließlich mit Lemma 3.4 (iii), (iv) und (ii)

$$x^\dagger = P_{\mathcal{N}^\perp} x^\dagger = (\mathrm{Id} - P_{\mathcal{N}}) x^\dagger = T^\dagger T x^\dagger = T^\dagger P_{\overline{\mathcal{R}}} y = T^\dagger T T^\dagger y = T^\dagger y,$$

was zu zeigen war. □

Wir können eine alternative Charakterisierung angeben.

Satz 3.6. *Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Dann ist $x \in X$ Ausgleichslösung von $Tx = y$ genau dann, wenn x die* Normalengleichungen

$$T^* T x = T^* y \tag{3.3}$$

erfüllt. Ist zusätzlich $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$, so ist $x = x^\dagger$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3.5 ist $x \in X$ Ausgleichslösung genau dann, wenn $Tx = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$ gilt. Nun ist $Tx = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$ äquivalent zu $Tx \in \overline{\mathcal{R}(T)}$ und $Tx - y \in \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp = \mathcal{N}(T^*)$, woraus $T^*(Tx - y) = 0$ folgt. Schließlich hat eine Ausgleichslösung x minimale Norm genau dann, wenn $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$ gilt. □

Die Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$ von $Tx = y$ ist also auch die Lösung – und damit insbesondere Ausgleichslösung – von (3.3) mit minimaler Norm, d. h.

$$x^\dagger = (T^*T)^\dagger T^* y.$$

Zur Berechnung von $x^\dagger$ können wir also die Minimum-Norm-Lösung von (3.3) heranziehen.

Bislang haben wir die Pseudo-Inverse nur auf ihrem Definitionsbereich betrachtet, ohne diesen näher zu untersuchen; dies holen wir nun nach. Nach Konstruktion ist $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$. Da orthogonale Komplemente stets abgeschlossen sind, gilt

$$\overline{\mathcal{D}(T^\dagger)} = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)^\perp \oplus \mathcal{N}(T^*) = Y,$$

d. h. $\mathcal{D}(T^\dagger)$ ist dicht in Y. Ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, so ist daher $\mathcal{D}(T^\dagger) = Y$ (woraus umgekehrt folgt, dass $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist). Weiterhin ist für $y \in \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^\dagger)$ die Minimum-Norm-Lösung durch $x^\dagger = 0$ gegeben. Die zentrale Frage ist also, ob ein gegebenes $y \in \overline{\mathcal{R}(T)}$ auch in $\mathcal{R}(T)$ liegt. Gilt dies stets, so muss $T^\dagger$ sogar stetig sein. Tatsächlich reicht bereits die Existenz eines $y \in \overline{\mathcal{R}(T)} \setminus \mathcal{R}(T)$, dass $T^\dagger$ nicht stetig sein kann.

Satz 3.7. *Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist $T^\dagger : \mathcal{D}(T^\dagger) \to X$ stetig genau dann, wenn $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir wenden den Satz 1.4 vom abgeschlossenen Graphen an. Zuerst zeigen wir, dass $T^\dagger$ abgeschlossen ist. Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T^\dagger)$ eine konvergente Folge mit $y_n \to y \in Y$ und $T^\dagger y_n \to x \in X$. Aus Lemma 3.4 (iv) folgt nun

$$TT^\dagger y_n = P_{\overline{\mathcal{R}}} y_n \to P_{\overline{\mathcal{R}}} y$$

wegen der Stetigkeit der orthogonalen Projektion. Zusammen mit der Stetigkeit von T folgt daraus

$$P_{\overline{\mathcal{R}}} y = \lim_{n\to\infty} P_{\overline{\mathcal{R}}} y_n = \lim_{n\to\infty} TT^\dagger y_n = Tx,$$

d. h. x ist eine Ausgleichslösung. Weiterhin gilt wegen $T^\dagger y_n \in \mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ auch

$$T^\dagger y_n \to x \in \mathcal{N}(T)^\perp,$$

denn $\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$ ist abgeschlossen. Wie im Beweis von Satz 3.5 bedeutet das, dass x die Minimum-Norm-Lösung von $Tx = y$ ist, d. h. $x = T^\dagger y$. Damit ist $T^\dagger$ abgeschlossen.

Ist nun $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, so gilt $\mathcal{D}(T^\dagger) = Y$. Nach Satz 1.4 ist deshalb $T^\dagger : Y \to X$ stetig. Ist andererseits $T^\dagger$ stetig auf $\mathcal{D}(T^\dagger)$, so kann wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(T^\dagger)$ in Y der Operator $T^\dagger$ stetig fortgesetzt werden auf Y zu einem $\overline{T^\dagger} \in \mathcal{L}(Y, X)$ durch

$$\overline{T^\dagger} y := \lim_{n\to\infty} T^\dagger y_n \quad \text{für eine Folge } \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T^\dagger) \text{ mit } y_n \to y \in Y.$$

(Wegen der Stetigkeit bildet $T^\dagger$ Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen ab, weshalb $\overline{T^\dagger}$ wohldefiniert und stetig ist.) Sei nun $y \in \overline{\mathcal{R}(T)}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(T)$ mit $y_n \to y$. Aus Lemma 3.4 (iv) und der Stetigkeit von T folgt dann

$$y = P_{\overline{\mathcal{R}}}y = \lim_{n\to\infty} P_{\overline{\mathcal{R}}}y_n = \lim_{n\to\infty} TT^\dagger y_n = T\overline{T^\dagger}y \in \mathcal{R}(T),$$

und damit $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$. □

Unglücklicherweise schließt das bereits den interessanten Fall von kompakten Operatoren im Hilbertraum aus.

Folgerung 3.8. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit unendlichdimensionalem Bild $\mathcal{R}(K)$. Dann ist $K^\dagger$ nicht stetig.*

Beweis. Angenommen, $K^\dagger$ ist stetig. Dann ist $\mathcal{R}(K)$ nach Satz 3.7 abgeschlossen, und damit hat der wie in Satz 3.3 definierte, nach Konstruktion bijektive, Operator $\tilde{K}$ eine stetige Inverse $\tilde{K}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(K), \mathcal{N}(K)^\perp)$. Nun ist K kompakt, und daher auch das Produkt $K \circ \tilde{K}^{-1}$. Wegen

$$K\tilde{K}^{-1}x = x \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{R}(K)$$

ist dann aber auch die Identität $\mathrm{Id} : \mathcal{R}(K) \to \mathcal{R}(K)$ kompakt, und das ist nur möglich, wenn $\mathcal{R}(K)$ endlichdimensional ist. □

Für kompakte Operatoren müssen wir die Bedingung (iii) in der Definition der Korrektgestelltheit also mit anderen Mitteln erreichen. Dies werden wir im nächsten Kapitel tun.

3.2 SINGULÄRWERTZERLEGUNG KOMPAKTER OPERATOREN

Wir charakterisieren nun die Moore–Penrose-Inverse von kompakten Operatoren $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit Hilfe von Orthonormalsystemen. Dafür möchten wir eine Spektralzerlegung verwenden, die für nicht selbstadjungierte Operatoren aber nicht existiert. Wegen Satz 3.6 können wir stattdessen aber genausogut K^*K betrachten. Dies führt auf die *Singulärwertzerlegung*.

Satz 3.9. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann existieren*

(i) eine Nullfolge $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots > 0$,

(ii) eine Orthonormalbasis $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ von $\overline{\mathcal{R}(K)}$,

(iii) eine Orthonormalbasis $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ von $\overline{\mathcal{R}(K^*)}$

mit

$$K v_n = \sigma_n u_n \quad \text{und} \quad K^* u_n = \sigma_n v_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

und

$$K x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n \, (x, v_n)_X \, u_n \qquad \text{für alle } x \in X. \tag{3.5}$$

Eine Folge $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$*, für die die* Singulärwertzerlegung (3.5) *gilt, heißt* singuläres System.

Beweis. Da $K^*K : X \to X$ kompakt und selbstadjungiert ist, liefert der Spektralsatz (Satz 2.2) eine Nullfolge $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (nach absteigendem Betrag sortiert) und ein Orthonormalsystem $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ aus zugehörigen Eigenvektoren mit

$$K^*K x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \, (x, v_n)_X \, v_n \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Wegen $\lambda_n = \lambda_n \|v_n\|_X^2 = (\lambda_n v_n, v_n)_X = (K^*K v_n, v_n)_X = \|K v_n\|_X^2 > 0$ können wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma_n := \sqrt{\lambda_n} > 0 \qquad \text{und} \qquad u_n := \sigma_n^{-1} K v_n \in Y$$

definieren. Letztere bilden aufgrund von

$$\left(u_i, u_j\right)_Y = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \left(K v_i, K v_j\right)_Y = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \left(K^* K v_i, v_j\right)_X = \frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_j} \left(v_i, v_j\right)_X = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Orthonormalsystem. Weiterhin gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$K^* u_n = \sigma_n^{-1} K^* K v_n = \sigma_n^{-1} \lambda_n v_n = \sigma_n v_n.$$

Nun ist $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K^*K)}$. Weiterhin gilt $\overline{\mathcal{R}(K^*K)} = \overline{\mathcal{R}(K^*)}$, denn für $x \in \overline{\mathcal{R}(K^*)}$ existiert eine Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $K^* y_n \to x$; insbesondere können wir $y_n \in \mathcal{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(K)}$ annehmen, und ein Diagonalfolgenargument ergibt $x \in \overline{\mathcal{R}(K^*K)}$. (Die andere Richtung ist klar.) Wir haben also eine Orthonormalbasis $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $\overline{\mathcal{R}(K^*)}$, die wir zu einer Orthonormalbasis V von X ergänzen können. Dafür kommen wegen der Orthogonalzerlegung von X nur Elemente aus $\mathcal{N}(K)$ in Frage. Wenden wir auf diese Basisdarstellung den Operator K an, erhalten wir für alle $x \in X$ die Darstellung

$$\begin{aligned} K x &= \sum_{v\in V} (x, v)_X \, K v = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, v_n)_X \, K v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, v_n)_X \, \sigma_n u_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, K^* u_n)_X \, u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (K x, u_n)_X \, u_n. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile folgt (3.5); die zweite impliziert, dass $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K)}$ ist. □

Da Eigenwerte von K^*K mit Eigenvektor v_n auch Eigenwerte von KK^* mit Eigenvektor u_n sind, erhält man mit Hilfe von (3.4) auch eine Singulärwertzerlegung von K^*:

$$K^*y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n (y, u_n)_Y v_n \qquad \text{für alle } y \in Y.$$

Wir verwenden nun die Singulärwertzerlegung von K, um den Definitionsbereich $\mathcal{D}(K^\dagger) = \mathcal{R}(K) \oplus \mathcal{R}(K)^\perp$ der Moore–Penrose-Inversen $K^\dagger$ zu charakterisieren. Da für $y \in \mathcal{R}(K)^\perp = \mathcal{N}(K^*)$ die Minimum-Norm-Lösung stets $x^\dagger = 0$ ist, und umgekehrt $\mathcal{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(K)}$ gilt, reduziert sich dies auf die Frage, wann $y \in \overline{\mathcal{R}(K)}$ tatsächlich in $\mathcal{R}(K)$ liegt.

Satz 3.10. *Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ mit singulärem System $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $y \in \overline{\mathcal{R}(K)}$. Dann ist $y \in \mathcal{R}(K)$ genau dann, wenn die* Picard-Bedingung

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2} |(y, u_n)_Y|^2 < \infty \tag{3.6}$$

erfüllt ist.

In diesem Fall gilt

$$K^\dagger y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-1} (y, u_n)_Y v_n. \tag{3.7}$$

Beweis. Sei $y \in \mathcal{R}(K)$, es existiere also ein $x \in X$ mit $Kx = y$. Dann ist

$$(y, u_n)_Y = (x, K^*u_n)_X = \sigma_n (x, v_n)_X \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und damit folgt aus der Besselschen Ungleichung (2.1)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2} |(y, u_n)_Y|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, v_n)_X|^2 \le \|x\|_X^2 < \infty.$$

Sei umgekehrt $y \in \overline{\mathcal{R}(K)}$ und gelte (3.6). Insbesondere ist damit $\{\sum_{n=1}^N \sigma_n^{-2} |(y, u_n)_Y|^2\}_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann ist auch $\{x_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_N := \sum_{n=1}^N \sigma_n^{-1} (y, u_n)_Y v_n$$

eine Cauchyfolge, denn die Folge $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bildet ein Orthonormalsystem und daher gilt

$$\|x_N - x_M\|_X^2 = \|\textstyle\sum_{n=N+1}^M \sigma_n^{-1} (y, u_n)_Y v_n\|_X^2 = \sum_{n=N+1}^M |\sigma_n^{-1} (y, u_n)_Y|^2 \to 0.$$

Weiterhin ist $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{R}(K^*)}$. Also konvergiert $\{x_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathcal{R}(K^*)}$ gegen ein

$$x := \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-1} (y, u_n)_Y \, v_n \in X,$$

für das wegen der Abgeschlossenheit von $\overline{\mathcal{R}(K^*)}$ auch gilt $x \in \overline{\mathcal{R}(K^*)} = \mathcal{N}(K)^\perp$.

Nun ist

$$Kx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-1} (y, u_n)_Y \, Kv_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (y, u_n)_Y \, u_n = P_{\overline{\mathcal{R}(K)}} y = y,$$

woraus $y \in \mathcal{R}(K)$ folgt. Nach Satz 3.5 ist aber $Kx = P_{\overline{\mathcal{R}(K)}} y$ und $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$ äquivalent mit $x = K^\dagger y$. □

Die Picard-Bedingung sagt, dass eine Minimum-Norm-Lösung nur existieren kann, wenn die „Fourier-Koeffizienten“ $(y, u_n)_Y$ von y im Vergleich zu den Singulärwerten σ_n schnell genug abfallen. Die Darstellung (3.7) zeigt auch, wie Störungen in y sich auf Störungen in $x^\dagger$ auswirken: Ist $y^\delta = y + \delta u_n$, so gilt

$$\|K^\dagger y^\delta - K^\dagger y\|_X = \delta \|K^\dagger u_n\|_X = \sigma_n^{-1}\delta \to \infty \quad \text{für } n \to \infty,$$

und je schneller die Singulärwerte abfallen, desto stärker ist die Fehlerverstärkung für ein festes n. Man unterscheidet daher

- *moderat schlecht gestellte* Probleme, für die $c, r > 0$ existieren so das $\sigma_n \geq cn^{-r}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (d. h. σ_n höchstens polynomiell gegen Null geht), und
- *stark schlecht gestellte* Probleme, für die dies nicht der Fall ist. Gilt sogar $\sigma_n \leq ce^{-n^r}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c, r > 0$, so ist das Problem *exponentiell schlecht gestellt.*

Für exponentiell schlecht gestellte Probleme kann man in der Regel keine Lösung erwarten, die über eine sehr grobe Näherung hinausgeht. Ist aber $\mathcal{R}(K)$ endlichdimensional, so bricht die Folge $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ab, und der Fehler bleibt beschränkt; in diesem Fall ist $K^\dagger$ also wie erwartet stetig.

Die Singulärwertzerlegung ist ein wertvolles analytisches Werkzeug; die explizite Bestimmung für konkrete Operatoren ist in der Regel aber sehr aufwendig. Wir betrachten wieder die Differentiation als einfaches Beispiel.

Beispiel 3.11. Sei $X = L^2([0,1])$ und $K \in \mathcal{K}(X, X)$ der Integraloperator aus Beispiel 3.1. Der adjungierte Operator ist dann gegeben durch

$$K^*y(t) = \int_0^1 k(t,s) y(s)\, ds = \int_t^1 y(s)\, ds,$$

denn $k(t,s) = 1$ für $s \geq t$ und 0 sonst. Wir suchen nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von K^*K, d. h. $\lambda > 0$ und $v \in L^2([0,1])$ mit

$$\lambda v(t) = [K^*Kv](t) = \int_t^1 \int_0^s v(r)\, dr\, ds. \tag{3.8}$$

Wir gehen zunächst formal vor. Einsetzen von $t = 1$ liefert $\lambda v(1) = 0$ und daher $v(1) = 0$. Ableiten von (3.8) ergibt

$$\lambda v'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\int_1^t \int_0^s v(r)\,dr\,ds\right) = -\int_0^t v(r)\,dr,$$

woraus durch Einsetzen von $t = 0$ folgt, dass $v'(0) = 0$ sein muss. Ein weiteres Mal Ableiten führt nun auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\lambda v''(t) + v(t) = 0,$$

welche die allgemeine Lösung

$$v(t) = c_1 \sin(\sigma^{-1}t) + c_2 \cos(\sigma^{-1}t)$$

für $\sigma := \sqrt{\lambda}$ und noch zu bestimmende Konstanten c_1, c_2 hat. Einsetzen in die Randbedingungen $v(1) = v'(0) = 0$ führt auf $c_1 = 0$ und $c_2 \cos(\sigma^{-1}) = 0$. Da $c_2 = 0$ auf die triviale Lösung $v = 0$ führen würde (und der Nullvektor ja kein Eigenvektor ist), muss $\cos(\sigma^{-1}) = 0$ sein; für die Singulärwerte σ_n kommen also nur die Kehrwerte der Nullstellen des Kosinus in Frage:

$$\sigma_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Damit sind die Eigenvektoren

$$v_n(t) = \sqrt{2}\cos\left((n - \tfrac{1}{2})\pi\, t\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

wobei wir die Konstante $c_2 = \sqrt{2}$ gewählt haben, um $\|v_n\|_{L^2([0,1])} = 1$ zu erreichen. Für u_n berechnen wir

$$u_n = \sigma_n^{-1} K v_n = (n - \tfrac{1}{2})\pi \int_0^t \sqrt{2}\cos\left((n - \tfrac{1}{2})\pi\, s\right)\, ds = \sqrt{2}\sin\left((n - \tfrac{1}{2})\pi\, t\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nun gilt $v_n, u_n \in L^2([0,1])$, und man verifiziert leicht, dass σ_n^2 und v_n die Eigenwertgleichung (3.8) erfüllen. Aus dem Beweis von Satz 3.9 folgt nun, dass $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System bilden.

Durch Einsetzen dieses Systems sieht man außerdem, dass die Picard-Bedingung (3.6) für ein $y \in L^2([0,1])$ äquivalent ist zur Bedingung, dass die gliedweise differenzierte Fourier-Entwicklung von y konvergiert, d. h. dass y (im klassischen Sinne) stetig differenzierbar ist.

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung lassen sich auch Funktionen von kompakten Operatoren definieren, was später hilfreich sein wird. Sei $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige und lokal beschränkte Funktion. Dann definieren wir für $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit singulärem System $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ den Operator $\varphi(K^*K) : X \to X$ durch

$$\varphi(K^*K)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\sigma_n^2)\,(x, v_n)_X\, v_n + \varphi(0)P_{\mathcal{N}(K)}x \qquad \text{für alle } x \in X. \tag{3.9}$$

Diese Reihe konvergiert in X, denn φ wird nur auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[0, \sigma_1^2] = [0, \|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}]$ ausgewertet. Weiterhin gilt

$$\|\varphi(K^*K)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(\sigma_n^2)| + \varphi(0) \le \sup_{\lambda\in[0,\|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}]} |\varphi(\lambda)| < \infty, \tag{3.10}$$

d. h. $\varphi(K^*K) \in \mathcal{L}(X,X)$.

Wir sind hier speziell an Potenzfunktionen $\varphi(t) = t^r$ für $r \ge 0$ interessiert. Einige konkrete Beispiele sollen das verdeutlichen:

(i) Für $\varphi(t) = 1$ gilt $\varphi(K^*K) = \mathrm{Id}$, denn für alle $x \in X$ ist

$$\varphi(K^*K)x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, v_n)_X\, v_n + P_{\mathcal{N}(K)}x = P_{\overline{\mathcal{R}(K^*)}}x + P_{\mathcal{N}(K)}x = x$$

wegen $\overline{\mathcal{R}(K^*)} = \mathcal{N}(K)^\perp$.

(ii) Für $\varphi(t) = t$ ist wegen $\varphi(0) = 0$ und dem Spektralsatz $\varphi(K^*K) = K^*K$.

(iii) Für $\varphi(t) = \sqrt{t}$ nennen wir $|K| := \varphi(K^*K)$ den *Betrag* von K; es gilt also

$$|K|x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n\,(x, v_n)_X\, v_n.$$

Wir werden später die folgenden Eigenschaften des Betrags benötigen.

Lemma 3.12. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann gilt*

(i) $|K|^{r+s} = |K|^r \circ |K|^s$ für alle $r, s \ge 0$;

(ii) $|K|^r$ ist selbstadjungiert für alle $r \ge 0$;

(iii) $\||K|x\|_X = \|Kx\|_Y$ für alle $x \in X$;

(iv) $\mathcal{R}(|K|) = \mathcal{R}(K^*)$.

Beweis. Aussage (i) folgt direkt aus

$$\begin{aligned} |K|^{r+s}x &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{r+s}\,(x, v_n)_X\, v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^r \left(\sigma_n^s\,(x, v_n)_X\right) v_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^r \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \sigma_m^s\,(x, v_m)_X\, v_m, v_n\right)_X v_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^r\,(|K|^s x, v_n)_X\, v_n = |K|^r(|K|^s x), \end{aligned}$$

da $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem ist.

Für beliebige $x, z \in X$ und $r > 0$ gilt weiterhin

$$(|K|^r x, z)_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^r \,(x, v_n)_X\, (v_n, z)_X = (x, |K|^r z)_X$$

und damit (ii).

Aussage (iii) folgt aus (i), (ii) und

$$\||K|x\|_X^2 = (|K|x, |K|x)_X = \left(|K|^2 x, x\right)_X = (K^*Kx, x)_X = (Kx, Kx)_X = \|Kx\|_X^2.$$

Zu (iv): Sei $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von K. Dann ist $\{(\sigma_n, v_n, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von K^* und – nach Definition – $\{(\sigma_n, v_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von $|K|$. Nun ist $x \in \mathcal{R}(K^*)$ genau dann, wenn $Kx \in \mathcal{R}(KK^*)$ und $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$ ist. Die Picard-Bedingung für $Kx \in \mathcal{R}(KK^*)$ ist aber, dass gilt

$$\infty > \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-4} |\,(Kx, u_n)_Y\,|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-4} |\,(x, K^*u_n)_X\,|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2} |\,(x, v_n)_X\,|^2.$$

Dies ist aber (vergleiche den Beweis von Satz 3.10) die Picard-Bedingung für $x \in \mathcal{R}(|K|)$, und für $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$ ist diese Bedingung auch notwendig. □

Lemma 3.13. *Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$. Dann gilt für alle $r > s \geq 0$ und $x \in X$ die* Interpolationsungleichung

$$\||K|^s x\|_X \leq \||K|^r x\|_X^{\frac{s}{r}}\, \|x\|_X^{1-\frac{s}{r}}. \tag{3.11}$$

Beweis. Nach Definition von $|K|^s$ gilt

$$\||K|^s x\|_X^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{2s} |(x, v_n)_X|^2,$$

woraus mit der Besselschen Ungleichung auch sofort die Aussage für $s = 0$ folgt.

Für $s > 0$ wenden wir die Höldersche Ungleichung

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{für} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

an auf

$$a_n := \sigma_n^{2s} |\,(x, v_n)_X\,|^{2\frac{s}{r}}, \qquad b_n := |\,(x, v_n)_X\,|^{2-2\frac{s}{r}}, \qquad p = \frac{r}{s}, \quad q = \frac{r}{r-s}.$$

Dann folgt wieder aus der Besselschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\||K|^s x\|_X^2 &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{2r} |\,(x, v_n)_X\,|^2\right)^{\frac{s}{r}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\,(x, v_n)_X\,|^2\right)^{1-\frac{s}{r}} \\ &\leq \||K|^r x\|_X^{2\frac{s}{r}}\, \|x\|_X^{2(1-\frac{s}{r})},\end{aligned}$$

und Wurzelziehen liefert die Aussage. □

4 REGULARISIERUNGSVERFAHREN

Wie im letzten Kapitel gezeigt, existiert für $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ die Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger = T^\dagger y$ der schlecht-gestellten Operatorgleichung $Tx = y$. In der Praxis hat man allerdings selten die "exakten Daten" y zur Hand, sondern nur eine "gestörte Messung" $y^\delta \in Y$ mit

$$\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta,$$

wobei $\delta > 0$ das *Fehlerniveau* bezeichnet. Da $T^\dagger$ im Allgemeinen nicht stetig ist, liefert $T^\dagger y^\delta$ in der Regel keine gute Näherung für $x^\dagger$, selbst wenn $y^\delta \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ gilt. Wir suchen daher eine Näherung x_α^δ, die einerseits stetig von y^δ – und damit von δ – abhängt, und andererseits durch Wahl des *Regularisierungsparameters* $\alpha > 0$ so nahe an $x^\dagger$ gebracht werden kann, wie das Fehlerniveau δ zulässt. Insbesondere soll für $\delta \to 0$ und geeignete Wahl von $\alpha(\delta)$ auch $x_{\alpha(\delta)}^\delta \to x^\dagger$ gelten. Ein Verfahren, das eine solche Näherung konstruiert, wird *Regularisierungsverfahren* genannt.

4.1 REGULARISIERUNG UND PARAMETERWAHL

Im Falle von linearen Operatoren im Hilbertraum lassen sich diese Konstruktionsverfahren in Form von *Regularisierungsoperatoren* definieren, die man als stetigen Ersatz für die unbeschränkte Pseudo-Inverse $T^\dagger$ auffassen kann. Dies führt auf die folgende Definition.

Definition 4.1. Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein beschränkter Operator zwischen den Hilberträumen X und Y. Eine Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ von linearen Operatoren $R_\alpha : Y \to X$ heißt *Regularisierung* (von $T^\dagger$), falls gilt

(i) $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$ für alle $\alpha > 0$;

(ii) $R_\alpha y \to T^\dagger y$ für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$.

Eine Regularisierung ist also eine punktweise Approximation der Moore–Penrose-Inversen durch stetige Operatoren. Aus dem Satz von Banach–Steinhaus folgt jedoch, dass die Konvergenz im Allgemeinen nicht gleichmäßig sein kann, wenn $T^\dagger$ nicht stetig ist.

Satz 4.2. *Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und sei $\{R_\alpha\}_{\alpha>0} \subset \mathcal{L}(Y, X)$ eine Regularisierung. Ist $T^\dagger$ nicht stetig, so kann $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ nicht gleichmäßig beschränkt sein. Insbesondere existiert dann ein $y \in Y$ mit $\|R_\alpha y\|_X \to \infty$ für $\alpha \to 0$.*

Beweis. Angenommen, es existiert kein solches $y \in Y$. Dann ist die Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0} \subset \mathcal{L}(Y,X)$ punktweise und damit nach dem Satz von Banach–Steinhaus gleichmäßig beschränkt. Es existiert daher ein $M > 0$ mit $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq M$ für alle $\alpha > 0$. Zusammen mit der punktweisen Konvergenz $R_\alpha \to T^\dagger$ auf der dichten Teilmenge $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset Y$ ergibt dann Folgerung 1.6, dass diese Konvergenz sogar auf ganz $\overline{\mathcal{D}(T^\dagger)} = Y$ gilt. Folgerung 1.7 liefert dann, dass $T^\dagger$ stetig ist, und die Aussage folgt durch Kontraposition. □

Tatsächlich kann man unter einer Zusatzannahme zeigen, dass die Divergenz für *alle* $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$ gelten muss.

Satz 4.3. *Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $T^\dagger$ nicht stetig und sei $\{R_\alpha\}_{\alpha>0} \subset \mathcal{L}(Y,X)$ eine Regularisierung von $T^\dagger$. Ist*

$$\sup_{\alpha>0} \|TR_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} < \infty, \tag{4.1}$$

so gilt $\|R_\alpha y\|_Y \to \infty$ für $\alpha \to 0$ und alle $y \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$.

Beweis. Sei $y \in Y$ beliebig. Angenommen, es gibt eine Nullfolge $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für die $\{R_{\alpha_n} y\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann existiert eine Teilfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $x_k := R_{\alpha_{n_k}} y$, mit $x_k \rightharpoonup x \in X$. Da beschränkte lineare Operatoren stets schwach stetig sind, gilt dann auch $Tx_k \rightharpoonup Tx$.

Andererseits folgt aus der Stetigkeit von T und der punktweisen Konvergenz $R_\alpha \to T^\dagger$ auf $\mathcal{D}(T^\dagger)$ mit Lemma 3.4 (iv), dass $TR_\alpha y \to TT^\dagger y = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$ für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ gilt. Die Annahme (4.1) und Folgerung 1.6 liefert dann die punktweise Konvergenz für alle $y \in Y$. Aus $Tx_k = TR_{\alpha_{n_k}} y \to P_{\overline{\mathcal{R}}} y$ und $Tx_k \rightharpoonup Tx$ folgt nun mit der Eindeutigkeit des Grenzwertes $Tx = P_{\overline{\mathcal{R}}} y$, was wie im Beweis von Satz 3.5 äquivalent ist zu $x = T^\dagger y$. Also ist $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, und die gewünschte Aussage folgt durch Kontraposition. □

Nun ist in der Regel das gegebene $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$ nicht in $\mathcal{D}(T^\dagger)$. Wir interessieren uns daher für den *Gesamtfehler*, den wir wie folgt aufsplitten können:

$$\begin{aligned} \|R_\alpha y^\delta - T^\dagger y\|_X &\leq \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y\|_X + \|R_\alpha y - T^\dagger y\|_X \\ &\leq \delta \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \|R_\alpha y - T^\dagger y\|_X. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Diese Zerlegung ist ein fundamentales Hilfsmittel in der Regularisierungstheorie, das uns noch öfter begegnen wird. Der erste Term beschreibt dabei den *(fortgepflanzten) Datenfehler*, der aufgrund von Satz 4.2 für $\alpha \to 0$ nicht beschränkt bleiben kann solange $\delta > 0$ ist. Der zweite Term beschreibt den *Verfahrensfehler*, der aufgrund der punktweisen Konvergenz für $\alpha \to 0$ gegen Null geht. Um eine sinnvolle Näherung zu erhalten, muss daher α in Abhängigkeit von δ korrekt gewählt werden. Insbesondere fordern wir, dass der Gesamtfehler für $\delta \to 0$ gegen Null geht. Hier und in Folge schreiben wir kurz $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$.

Definition 4.4. Eine Funktion $\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \to \mathbb{R}^+$, $(\delta, y^\delta) \mapsto \alpha(\delta, y^\delta)$, heißt *Parameterwahlstrategie*. Man unterscheidet

(i) *a priori-Strategien*, die nur von δ abhängen;

(ii) *a posteriori-Strategien*, die von δ und y^δ abhängen;

(iii) *heuristische Strategien*, die nur von y^δ abhängen.

Ist $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Regularisierung von $T^\dagger$ und α eine Parameterwahlstrategie, so heißt das Paar (R_α, α) ein *(konvergentes) Regularisierungsverfahren*, falls für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \|R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^\dagger y\|_X : y^\delta \in Y, \|y^\delta - y\|_Y \leq \delta \right\} = 0. \tag{4.3}$$

Wir betrachten zunächst die klassischen Beispiele für Parameterwahlstrategien.

A PRIORI-STRATEGIEN

Wir zeigen zuerst, dass für jede Regularisierung stets eine a priori-Strategie – und damit ein Regularisierungsverfahren – existiert.

Satz 4.5. *Sei $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Regularisierung von $T^\dagger$. Dann existiert eine a priori-Strategie α, so dass (R_α, α) ein Regularisierungsverfahren ist.*

Beweis. Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ beliebig. Da nach Annahme $R_\alpha \to T^\dagger$ punktweise konvergiert, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\sigma(\varepsilon) > 0$ mit

$$\|R_{\sigma(\varepsilon)} y - T^\dagger y\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies definiert eine monoton wachsende Funktion $\sigma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma(\varepsilon) = 0$. Weiterhin ist für festes $\varepsilon > 0$ der Operator $R_{\sigma(\varepsilon)}$ stetig, und damit existiert ein $\rho(\varepsilon) > 0$ mit

$$\|R_{\sigma(\varepsilon)} z - R_{\sigma(\varepsilon)} y\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } z \in Y \text{ mit } \|z - y\|_Y \leq \rho(\varepsilon).$$

Wieder wird dadurch eine monoton wachsende Funktion $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon) = 0$ definiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei annehmen, dass ρ strikt monoton und stetig ist. Nach dem Satz von der Umkehrfunktion existiert also auf $\mathcal{R}(\rho)$ eine strikt monotone und stetige Umkehrfunktion ρ^{-1} mit $\lim_{\delta \to 0} \rho^{-1}(\delta) = 0$. Wir setzen diese monoton und stetig fort auf $\mathbb{R}^+$ und definieren unsere a-priori-Strategie

$$\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad \delta \mapsto \sigma(\rho^{-1}(\delta)).$$

Dann gilt insbesondere $\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$. Weiterhin existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta := \rho(\varepsilon) > 0$ so, dass mit $\alpha(\delta) = \sigma(\varepsilon)$ gilt

$$\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|_X \leq \|R_{\sigma(\varepsilon)}y^\delta - R_{\sigma(\varepsilon)}y\|_X + \|R_{\sigma(\varepsilon)}y - T^\dagger y\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$. Damit konvergiert $\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|_X \to 0$ für $\delta \to 0$ und jede Familie $\{y^\delta\}_{\delta>0}$ mit $\|y^\delta - y\|_Y \leq \delta$. Also ist (R_α, α) ein konvergentes Regularisierungsverfahren. □

Wir können sogar eine Charakterisierung von a priori-Strategien angeben, die zu konvergenten Regularisierungsverfahren führen.

Satz 4.6. *Seien $T^\dagger$ nicht stetig, $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Regularisierung, und $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine a priori-Strategie. Dann ist (R_α, α) ein Regularisierungsverfahren genau dann, wenn gilt*

(i) $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$,

(ii) $\lim\limits_{\delta\to 0}\delta\|R_{\alpha(\delta)}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = 0$.

Beweis. Aus der Zerlegung (4.2) des Gesamtfehlers folgt sofort

$$\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|_X \leq \delta\|R_{\alpha(\delta)}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \|R_{\alpha(\delta)}y - T^\dagger y\|_X \to 0 \qquad \text{für } \delta \to 0,$$

da der erste Term nach Bedingung (ii) und der zweite Term wegen der punktweisen Konvergenz von Regularisierungsoperatoren zusammen mit Bedingung (i) gegen Null geht.

Sei umgekehrt angenommen, dass Bedingung (i) oder (ii) nicht gelten. Ist (i) verletzt, so konvergiert $R_{\alpha(\delta)}$ nicht punktweise gegen $T^\dagger y$, und somit ist (4.3) für $y^\delta = y$ und $\delta = 0$ verletzt und damit (R_α, α) kein Regularisierungsverfahren. Gilt dagegen (i) aber nicht (ii), so existiert eine Nullfolge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n\|R_{\alpha(\delta_n)}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \geq C > 0$. Wir können also eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $\|z_n\|_Y = 1$ und $\delta_n\|R_{\alpha(\delta_n)}z_n\|_X \geq C$ finden. Sei nun $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ beliebig, und setze $y_n := y + \delta_n z_n$. Dann gilt $\|y - y_n\|_Y \leq \delta_n$, aber

$$R_{\alpha(\delta_n)}y_n - T^\dagger y = (R_{\alpha(\delta_n)}y - T^\dagger y) + \delta_n R_{\alpha(\delta_n)}z_n \not\to 0,$$

da der erste Term auf der rechten Seite wegen Bedingung (i) und der punktweisen Konvergenz von R_α eine Nullfolge, aber der zweite Term nach Konstruktion keine Nullfolge ist. Also ist (4.3) verletzt und (R_α, α) daher kein Regularisierungsverfahren. Die Aussage folgt nun durch Kontraposition. □

Wegen $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \to \infty$ für $\alpha \to 0$ bedeutet dabei die zweite Bedingung, dass α nicht zu schnell im Verhältnis zu δ gegen Null gehen darf. Eine a priori-Strategie hat also üblicherweise die Form $\alpha(\delta) = \delta^r$ für ein $r < 1$.

A POSTERIORI-STRATEGIEN

Wie wir später sehen werden, benötigt die optimale Wahl von $\alpha(\delta)$ Informationen über die fehlerfreie (Minimum-Norm-)Lösung $x^\dagger$, die nicht leicht zugänglich sind. A posteriori-Strategien kommen dagegen ohne diese Information aus. Die Grundidee ist dabei folgende: Sei wieder $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ sowie $y^\delta \in Y$ mit $\|y^\delta - y\|_Y = \delta$, und betrachte für $x_\alpha^\delta := R_\alpha y^\delta$ das *Residuum*

$$\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y.$$

Gilt nun $y \in \mathcal{R}(T)$ und $\|y - y^\delta\|_Y = \delta$, so erfüllt selbst die (eigentlich gesuchte) Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$ wegen $Tx^\dagger = y$ nur

$$\|Tx^\dagger - y^\delta\|_Y = \|y - y^\delta\|_Y = \delta.$$

Es ist also nicht sinnvoll zu versuchen, für die Näherung x_α^δ ein kleineres Residuum zu erreichen. Dies motiviert das *Diskrepanzprinzip von Morozov*: Zu gegebenem $\delta > 0$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$ wähle $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ so, dass gilt

$$\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta \qquad \text{für ein } \tau > 1 \text{ unabhängig von } \delta \text{ und } y^\delta. \tag{4.4}$$

Allerdings muss dieses Prinzip nicht erfüllt sein: Ist $y \in \mathcal{R}(T)^\perp \setminus \{0\}$, so gilt selbst für exakte Daten $y^\delta = y$ und die Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$

$$\|Tx^\dagger - y\|_Y = \|TT^\dagger y - y\|_Y = \|P_{\overline{\mathcal{R}}} y - y\|_Y = \|y\|_Y > \delta$$

für δ klein genug. Wir müssen also annehmen, dass dieser Fall nicht eintreten kann; hinreichend dafür ist, dass $\mathcal{R}(T)$ dicht in Y liegt (denn dann muss $\mathcal{R}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp = \{0\}$ sein).

Für die praktische Umsetzung wählt man üblicherweise eine Nullfolge $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, berechnet sukzessive $x_{\alpha_n}^\delta$ für $n = 1, \dots,$ und hört auf, sobald für ein α_{n^*} das Diskrepanzprinzip (4.4) erfüllt ist. Der folgende Satz liefert hierfür die Rechtfertigung.

Satz 4.7. *Sei $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Regularisierung von $T^\dagger$ mit $\mathcal{R}(T)$ dicht in Y, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Nullfolge, und $\tau > 1$. Ist die Familie $\{TR_\alpha\}_{\alpha>0}$ gleichmäßig beschränkt, so existiert für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$ ein $n^* \in \mathbb{N}$, so dass gilt*

$$\|Tx_{\alpha_{n^*}}^\delta - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|Tx_{\alpha_n}^\delta - y^\delta\|_Y \qquad \text{für alle } n < n^*.$$

Beweis. Wir gehen vor wie im Beweis von Satz 4.3. Auf $\mathcal{D}(T^\dagger)$ konvergiert TR_α punktweise gegen $TT^\dagger = P_{\overline{\mathcal{R}}}$ und damit wegen der gleichmäßigen Beschränktheit auf ganz $Y = \overline{\mathcal{D}(T^\dagger)}$. Für alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T)$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$ folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_{\alpha_n}^\delta - y^\delta\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|TR_{\alpha_n} y^\delta - y^\delta\|_Y = \|P_{\overline{\mathcal{R}}} y^\delta - y^\delta\|_Y = 0$$

wegen $\overline{\mathcal{R}(T)} = Y$, und damit die Behauptung. □

Um zu zeigen, dass das Diskrepanzprinzip tatsächlich ein Regularisierungsverfahren liefert, muss man es in Kombination mit einer konkreten Regularisierung betrachten. Wir werden dies in den nächsten Kapiteln nachholen.

HEURISTISCHE STRATEGIEN

Heuristische Strategien kommen sogar ohne Kenntnis des Fehlerniveaus δ aus. Dies ist in der Praxis sehr relevant, denn oft hat man keine hinreichend scharfe Abschätzung für δ. Das folgende einschneidende Resultat – in der Literatur unter dem Namen *Bakushinskiĭ-Veto* bekannt, siehe [Bakushinskiĭ 1985] – sagt jedoch, dass das im Allgemeinen nicht klappen kann.

Satz 4.8. *Sei $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Regularisierung von $T^\dagger$. Existiert eine heuristische Parameterwahlstrategie so, dass (R_α, α) ein Regularisierungsverfahren ist, dann ist $T^\dagger$ stetig.*

Beweis. Angenommen, es gäbe solch eine Parameterwahlstrategie $\alpha : Y \to \mathbb{R}^+$. Dann können wir die Abbildung

$$R : Y \to X, \qquad y \mapsto R_{\alpha(y)}y,$$

definieren. Sei nun $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ beliebig. Nach Annahme ist (R_α, α) ein Regularisierungsverfahren, und deshalb folgt aus (4.3) mit $y^\dagger = y$ und $\delta = 0$, dass $Ry = T^\dagger y$ ist. Für eine beliebige Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T^\dagger)$ mit $y_n \to y$ ergibt (4.3) mit $y^\delta = y_n$ und $\delta := \|y^\delta - y\|_Y$ nun

$$T^\dagger y_n = Ry_n = R_{\alpha(y_n)}y_n \to T^\dagger y,$$

d. h. $T^\dagger$ ist stetig auf $\mathcal{D}(T^\dagger)$. □

Insbesondere kann für kompakte Operatoren mit unendlichdimensionalem Bild keine heuristische Parameterwahlstrategie zu einem konvergenten Regularisierungsverfahren führen. Natürlich heißt das nicht, dass solche Strategien in der Praxis nicht eingesetzt werden. Zum einen verbietet das Veto keine Strategien für endlichdimensionale inverse Probleme (wie etwa sehr schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme). Schaut man sich den Beweis außerdem genau an, erkennt man auch, dass der zentrale Schritt darin besteht, die Parameterwahlstrategie auf Daten $y^\delta \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ anzuwenden. Der schlimmstmögliche Fall für die gestörten Daten ist also $y^\delta \in \mathcal{R}(T)$ (wegen $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^\dagger)$ spielt nur dieser Teilraum von $\mathcal{D}(T^\dagger)$ eine Rolle), und in diesem Fall kann keine Konvergenz garantiert werden. Nun ist üblicherweise in der Praxis T ein kompakter (d. h. glättender) Operator, während Störungen eher zufälligen Charakter haben und damit nicht in $\mathcal{R}(T)$ liegen. Im „üblichen“ Fall kann ein heuristisches Verfahren also sehr wohl funktionieren. In der Tat kann man zeigen, dass unter der zusätzlichen Annahme $y^\delta \notin \mathcal{D}(T^\dagger)$ eine ganze Klasse von beliebten heuristischen Strategien zu einem Regularisierungsverfahren führen. Auch hierfür muss man die Kombination mit konkreten Regularierungen betrachten, wir geben aber bereits ein paar Beispiele an:

(i) Das *Quasioptimalitäts-Prinzip* wählt eine endliche streng monoton fallende Folge $\{\alpha_n\}_{n\in\{1,\dots,N\}}$ und bestimmt $\alpha(y^\delta)$ als α_{n^*} mit

$$\alpha_{n^*} = \arg\min_{1\le n<N} \|x^\delta_{\alpha_{n+1}} - x^\delta_{\alpha_n}\|_X.$$

(ii) Die *Hanke–Raus-Regel* bestimmt

$$\alpha(y^\delta) = \arg\min_{\alpha>0} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y.$$

(iii) Das *L-Kurven-Kriterium* bestimmt

$$\alpha(y^\delta) = \arg\min_{\alpha>0} \|x_\alpha^\delta\|_X\|Tx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y.$$

Alle diese Verfahren basieren in der einen oder anderen Weise darauf, aus dem Residuum eine möglichst gute Schätzung des Fehlerniveaus zu gewinnen, die dann analog zu a priori- oder a posteriori-Strategien eingesetzt werden kann. Einen umfassenden Vergleich dieser und weiterer Strategien findet man in [Bauer & Lukas 2011].

4.2 KONVERGENZRATEN

Eine wesentliche Fragestellung in der Regularisierung inverser Probleme ist das Herleiten von Fehlerabschätzungen der Form

$$\|R_\alpha y^\delta - T^\dagger y\|_X \leq \varphi(\delta)$$

für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$. Wir sind insbesondere an Abschätzungen für den *schlimmstmöglichen Fehler*

$$\mathcal{E}(y,\delta) := \sup\left\{\|R_{\alpha(\delta,y^\delta)}y^\delta - T^\dagger y\|_X : y^\delta \in Y \text{ mit } \|y-y^\delta\|_Y \leq \delta\right\} \tag{4.5}$$

(der für konvergente Regularisierungsverfahren nach (4.3) gegen Null geht für $\delta \to 0$ und alle $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$) interessiert. Dabei muss φ in irgendeiner Form von y abhängen, denn sonst könnte man a priori – ohne Kenntnis von y und y^δ – garantierte Fehlerschranken für Regularisierungsverfahren angeben. Da die Konvergenz von $R_\alpha \to T^\dagger$ lediglich punktweise aber nicht gleichmäßig ist, kann man solche Abschätzungen jedoch nicht erwarten.

Satz 4.9. *Sei (R_α, α) ein Regularisierungsverfahren. Existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$ und*

$$\sup_{y\in\mathcal{D}(T^\dagger)\cap B_Y} \mathcal{E}(y,\delta) \leq \varphi(\delta), \tag{4.6}$$

so ist $T^\dagger$ stetig.

Beweis. Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger) \cap B_Y$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T^\dagger) \cap B_Y$ eine Folge mit $y_n \to y$. Mit $\delta_n := \|y - y_n\|_Y \to 0$ für $n \to \infty$ gilt dann

$$\|T^\dagger y_n - T^\dagger y\|_X \le \|T^\dagger y_n - R_{\alpha(\delta_n, y_n)} y_n\|_X + \|R_{\alpha(\delta_n, y_n)} y_n - T^\dagger y\|_X.$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite können wir nun mit Hilfe von (4.6) mit $\mathcal{E}(y_n, \delta_n)$ respektive $\mathcal{E}(y, \delta_n)$ und $y^\delta = y_n$ in (4.5) abschätzen und erhalten

$$\|T^\dagger y_n - T^\dagger y\|_X \le 2\varphi(\delta_n).$$

Daraus folgt nach Annahme an φ, dass $T^\dagger y_n \to T^\dagger y$ für $\delta \to 0$ konvergiert und damit $T^\dagger$ stetig auf $\mathcal{D}(T^\dagger) \cap B_Y$ ist. Wegen der Linearität von $T^\dagger$ muss also $T^\dagger$ stetig auf ganz $\mathcal{D}(T^\dagger)$ sein. □

Die Konvergenz kann also beliebig langsam sein; Kenntnis von δ alleine reicht daher nicht aus, um Fehlerschranken angeben zu können – wir brauchen weitere Annahmen an die exakten Daten y bzw. die gesuchte Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger = T^\dagger y$. Anhand von Satz 4.9 sieht man, dass die Existenz von Konvergenzraten eng mit der Stetigkeit von $T^\dagger$ auf abgeschlossenen Teilmengen verknüpft ist. Wir betrachten daher für $\mathcal{M} \subset X$ und $\delta > 0$ die Größe

$$\varepsilon(\mathcal{M}, \delta) := \sup\left\{\|x\|_X : x \in \mathcal{M},\ \|Tx\|_Y \le \delta\right\},$$

die man als *bedingtes Stetigkeitsmodul* von $T^\dagger : \mathcal{R}(T) \cap \delta B_Y \to \mathcal{M}$ interpretieren kann. Das Stetigkeitsmodul gibt nun eine untere Schranke für den schlimmstmöglichen Fehler an.

Satz 4.10. *Sei (R_α, α) ein Regularisierungsverfahren. Dann gilt für alle $\delta > 0$ und $\mathcal{M} \subset X$*

$$\sup_{y\in\mathcal{D}(T^\dagger), T^\dagger y \in \mathcal{M}} \mathcal{E}(y, \delta) \ge \varepsilon(\mathcal{M}, \delta).$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{M}$ mit $\|Tx\|_Y \le \delta$. Für $y^\delta = 0$ erhalten wir dann

$$\|x\|_X = \|T^\dagger T x - R_{\alpha(\delta,0)} 0\|_X \le \mathcal{E}(Tx, \delta)$$

und damit

$$\varepsilon(\mathcal{M}, \delta) = \sup_{x\in\mathcal{M}, \|Tx\|_Y \le \delta} \|x\|_X \le \sup_{x\in\mathcal{M}, \|Tx\|_Y \le \delta} \mathcal{E}(Tx, \delta) \le \sup_{T^\dagger y\in\mathcal{M}, y\in\mathcal{D}(T^\dagger)} \mathcal{E}(y, \delta),$$

da $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp$ und $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^\dagger)$. □

Für eine geeignete Wahl von $\mathcal{M}$ kann man nun scharfe Schranken für $\varepsilon(\mathcal{M}, \delta)$ angeben. Wir betrachten hier für kompakte Operatoren $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ Mengen der Form

$$X_{\nu,\rho} = \{|K|^\nu w \in X : \|w\|_X \le \rho\} \subset \mathcal{R}(|K|^\nu).$$

Satz 4.11. *Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und $\nu, \rho > 0$. Dann gilt für alle $\delta > 0$*

$$\varepsilon(X_{\nu,\rho}, \delta) \le \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Beweis. Sei $x \in X_{\nu,\rho}$ und $\|Kx\|_Y \le \delta$. Dann existiert $w \in X$ mit $x = |K|^\nu w$ und $\|w\|_X \le \rho$. Aus der Interpolationsungleichung in Lemma 3.13 mit $s = \nu$ und $r = \nu + 1$ sowie den Eigenschaften aus Lemma 3.12 folgt daher

$$\begin{aligned} \|x\|_X &= \||K|^\nu w\|_X \le \||K|^{\nu+1} w\|_X^{\frac{\nu}{\nu+1}} \|w\|_X^{\frac{1}{\nu+1}} = \|K|K|^\nu w\|_Y^{\frac{\nu}{\nu+1}} \|w\|_X^{\frac{1}{\nu+1}} \\ &= \|Kx\|_Y^{\frac{\nu}{\nu+1}} \|w\|_X^{\frac{1}{\nu+1}} \le \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Supremum über alle $x \in X_{\nu,\rho}$ mit $\|Kx\|_Y \le \delta$ ergibt die Aussage. □

Dies ist zwar nur eine obere Schranke, sie wird jedoch für eine Folge von gestörten Daten angenommen.

Satz 4.12. *Sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ und $\nu, \rho > 0$. Dann existiert eine Nullfolge $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$\varepsilon(X_{\nu,\rho}, \delta_n) = \delta_n^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Beweis. Sei $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System für K, und setze $\delta_n := \rho\sigma_n^{\nu+1}$ und $x_n := |K|^\nu(\rho v_n)$. Da die Singulärwerte eine Nullfolge bilden, gilt $\delta_n \to 0$. Weiter ist nach Konstruktion $x_n \in X_{\nu,\rho}$. Aus $\sigma_n = (\rho^{-1}\delta_n)^{\frac{1}{\nu+1}}$ folgt nun

$$x_n = \rho|K|^\nu v_n = \rho\sigma_n^\nu v_n = \delta_n^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}} v_n,$$

da σ_n^ν Eigenwert von $|K|^\nu$ mit Eigenvektor v_n ist. Also ist $\|x_n\|_X = \delta_n^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}}$. Analog folgt

$$K^*Kx_n = \delta_n^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}} \sigma_n^2 v_n = \delta_n^{\frac{\nu+2}{\nu+1}} \rho^{-\frac{1}{\nu+1}} v_n$$

und damit

$$\|Kx_n\|_Y^2 = (Kx_n, Kx_n)_Y = (K^*Kx_n, x_n)_X = \delta_n^2.$$

Es gilt daher

$$\varepsilon(X_{\nu,\rho}, \delta_n) = \sup_{x\in X_{\nu,\rho},\ \|Kx\|_Y \le \delta} \|x\|_X \ge \|x_n\|_X = \delta_n^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}},$$

woraus zusammen mit Satz 4.11 die Gleichheit folgt. □

Hieraus folgt, dass für einen kompakten Operator K mit unendlichdimensionalem Bild kein Regularisierungsverfahren einen Gesamtfehler ergeben kann, der für $\delta \to 0$ garantiert schneller als $\delta_n^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}$ gegen Null geht – und das auch nur unter der Zusatzannahme $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$.[1] Insbesondere konvergiert der Gesamtfehler also stets langsamer als der Datenfehler.

Ein Regularisierungsverfahren heißt daher *optimal* (für ν und ρ), falls gilt

$$\mathcal{E}(Kx^\dagger,\delta) = \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}} \qquad \text{für alle } x^\dagger \in X_{\nu,\rho},$$

und *ordnungsoptimal* (für ν und ρ), falls eine Konstante $c = c(\nu) \geq 1$ existiert so dass gilt

$$\mathcal{E}(Kx^\dagger,\delta) \leq c\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}} \qquad \text{für alle } x^\dagger \in X_{\nu,\rho}. \tag{4.7}$$

Lässt man zu, dass die Konstante von $x^\dagger$ abhängt – ist man also nur an *Konvergenzraten* interessiert – so betrachtet man

$$X_\nu := \bigcup_{\rho>0} X_{\nu,\rho} = \mathcal{R}(|K|^\nu)$$

und bezeichnet ein Regularisierungsverfahren als ordnungsoptimal für ν, falls eine Konstante $c \geq 1$ existiert mit

$$\mathcal{E}(Kx^\dagger,\delta) \leq c\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}} \qquad \text{für alle } x^\dagger \in X_\nu.$$

Die Bedingung $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$ bezeichnet man dabei als *Quellbedingung*, das Element $w \in X$ mit $|K|^\nu w = x^\dagger$ als *Quelldarstellung*. Da K ein kompakter (d. h. glättender) Operator ist, stellen Quellbedingungen abstrakte Glattheitsbedingungen dar. Für den Integrationsoperator $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ aus Beispiel 3.11 bedeutet etwa $x \in X_{2,\rho}$, dass $x = K^*Kw = \int_t^1\int_0^s w(r)\,dr\,ds$ eine durch ρ beschränkte zweite Ableitung w besitzt. Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sieht man leicht, dass die Bedingung $x^\dagger \in X_\nu$ einer verschärften Picard-Bedingung entspricht, d. h. einer Abklingrate der Singulärwerte, die umso schneller im Vergleich zu den Fourier-Koeffizienten von y ist, desto grösser ν ist.

Lemma 4.13. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit singulärem System $\{(\sigma_n,u_n,v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $y \in \mathcal{R}(K)$. Dann ist $x^\dagger = K^\dagger y \in X_\nu$ genau dann, wenn gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2-2\nu}|(y,u_n)_Y|^2 < \infty. \tag{4.8}$$

Beweis. Nach Definition ist $K^\dagger y \in X_\nu$ genau dann, wenn ein $w \in X$ existiert mit

$$K^\dagger y = |K|^\nu w = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^\nu\,(w,v_n)_X\,v_n.$$

[1] Dies ist ein zentrales Paradigma in der Theorie – und Praxis – der inversen Probleme: *Stabilität ist nur unter Zusatzannahmen erreichbar!*

Mit Hilfe der Darstellung (3.7) folgt daraus

$$\sigma_n^{-1}(y, u_n)_Y = \sigma_n^{\nu}(w, v_n)_X \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wie im Beweis von Satz 3.10 folgt nun, dass $w \in X$ dann und nur dann gilt, wenn die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(w, v_n)_X|^2$ konvergiert, d. h. (4.8) gilt. □

Tatsächlich impliziert die Ordnungsoptimalität bereits die Regularisierungseigenschaft eines Verfahrens. Dies ist nützlich, denn es ist manchmal leichter, die Optimalität nachzuweisen als die Regularisierungseigenschaft.

Satz 4.14. *Seien $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ mit $\mathcal{R}(K)$ dicht in Y, $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Regularisierung und $\alpha(\delta, y^\delta)$ eine Parameterwahlstrategie. Existiert ein $\tau_0 \geq 1$ so dass R_α zusammen mit $\alpha_\tau := \alpha(\tau\delta, y^\delta)$ für alle $\tau > \tau_0$ die Bedingung (4.7) für ein $\nu > 0$ und alle $\rho > 0$ erfüllt, so ist (R_α, α_τ) für alle $\tau > \tau_0$ ein Regularisierungsverfahren.*

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass aus der *gleichmäßigen* Konvergenz des schlimmstmöglichen Fehlers für alle $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$ die *punktweise* Konvergenz für alle $x^\dagger \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ folgt. Wir konstruieren dafür ein geeignetes $x_N \in X_{\nu,\rho}$, das wir in die Fehlerabschätzung einschieben, und wenden dann die Ordnungsoptimalität an.

Sei also $y \in \mathcal{D}(K^\dagger) = \mathcal{R}(K)$ und $x^\dagger = K^\dagger y$ (und damit $Kx^\dagger = y$). Sei weiterhin $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von K. Für $N \in \mathbb{N}$ definiere

$$x_N := \sum_{n=1}^{N} \left(x^\dagger, v_n\right)_X v_n$$

und

$$\begin{aligned} y_N := Kx_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(x^\dagger, v_n\right)_X Kv_n = \sum_{n=1}^{N} \left(x^\dagger, v_n\right)_X \sigma_n u_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(x^\dagger, K^* u_n\right)_X u_n = \sum_{n=1}^{N} (y, u_n)_X u_n. \end{aligned}$$

Da $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K)}$ und $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K^*)} = \mathcal{N}(K)^\perp$ ist, besitzen $x^\dagger = K^\dagger y \in \mathcal{N}(K)^\perp$ und $y = Kx^\dagger \in \mathcal{R}(K)$ die Reihendarstellungen

$$x^\dagger = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(x^\dagger, v_n\right)_X v_n, \qquad y = \sum_{n\in\mathbb{N}} (y, u_n)_Y u_n.$$

Damit ist

$$\|x^\dagger - x_N\|_X^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2$$

und

$$\|y - y_N\|_Y^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|(y, u_n)_Y\right|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \sigma_n^2 \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 \tag{4.9}$$
$$\leq \sigma_N^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 = \sigma_N^2 \|x^\dagger - x_N\|_X^2,$$

da $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Insbesondere konvergieren $x_N \to x^\dagger$ und $y_N \to y$ mit $N \to \infty$.

Nach Konstruktion ist $y_N \in \mathcal{R}(K)$ und $x_N \in \mathcal{N}(K)^\perp$, und damit gilt $x_N = K^\dagger y_N$. Nach Lemma 4.13 ist deshalb $x_N \in X_\nu$ für alle $\nu > 0$, denn wegen $(y_N, u_n)_Y = 0$ für $n > N$ ist die Reihe in (4.8) endlich. Es existiert also ein $w_N \in X$ mit $x_N = |K|^\nu w_N$, d. h.

$$\sum_{n=1}^{N} \left(x^\dagger, v_n\right)_X v_n = x_N = |K|^\nu w_N = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^\nu \,(w_N, v_n)_X\, v_n.$$

Da $\mathcal{R}(K)$ dicht in Y ist, kann K kein endlichdimensionales Bild haben, was $\sigma_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert. Aus der Orthonormalität der v_n folgt daher

$$(w_N, v_n)_X = \begin{cases} \sigma_n^{-\nu} \left(x^\dagger, v_n\right)_X & n \leq N, \\ 0 & n > N. \end{cases}$$

Deshalb gilt

$$\|w_N\|_X^2 = \sum_{n=1}^{N} |(w_N, v_n)_X|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^{-2\nu} \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2$$
$$\leq \sigma_N^{-2\nu} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 = \sigma_N^{-2\nu} \|x^\dagger\|_X^2$$

und damit $x_N \in X_{\nu,\rho}$ mit $\rho = \sigma_N^{-\nu} \|x^\dagger\|_X$.

Sei nun $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$ und $\tau > \tau_0 \geq 1$. Wir wählen nun $N(\delta)$ so, dass gilt

$$\sigma_{N(\delta)} \|x^\dagger - x_{N(\delta)}\|_X \leq \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0} \delta < \sigma_{N(\delta)-1} \|x^\dagger - x_{N(\delta)-1}\|_X, \tag{4.10}$$

(dies ist möglich, da sowohl $\{\sigma_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ als auch $\{\|x_N - x^\dagger\|_X\}_{N\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolgen sind). Dann gilt wegen (4.9) mit $N = N(\delta)$

$$\|y^\delta - y_N\|_Y \leq \|y^\delta - y\|_Y + \|y - y_N\|_Y \leq \delta + \sigma_N \|x^\dagger - x_N\|_X$$
$$\leq \left(1 + \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0}\right) \delta =: \tilde{\delta}.$$

Ist y^δ also ein gestörter Messwert zu den exakten Daten y mit Fehlerniveau δ, so ist y^δ auch ein gestörter Messwert zu y_N mit Fehlerniveau $\tilde\delta$. Für $\tilde\tau := \frac{1}{2}(\tau + \tau_0) > \tau_0$ ist dann $\tilde\tau\tilde\delta = \tau\delta$ und damit

$$\alpha_{\tilde\tau}(\tilde\delta, y^\delta) = \alpha(\tilde\tau\tilde\delta, y^\delta) = \alpha(\tau\delta, y^\delta) = \alpha_\tau(\delta, y^\delta),$$

d. h. die Parameterwahlstrategien zu y und y_N stimmen für festes y^δ überein. Aus der Bedingung (4.7) für $(R_\alpha, \alpha_{\tilde\tau})$ folgt daher für $x_N \in X_{\nu,\rho}$, dass gilt

$$\begin{aligned}\|R_{\alpha_\tau(\delta,y^\delta)}y^\delta - x_N\|_X = \|R_{\alpha_{\tilde\tau}(\tilde\delta,y^\delta)}y^\delta - K^\dagger y_N\|_X \le \mathcal{E}(y_N,\tilde\delta) \le c\tilde\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\left(\sigma_N^{-\nu}\|x^\dagger\|_X\right)^{\frac{1}{\nu+1}}\\ =: c_{\tau,\nu}\left(\frac{\delta}{\sigma_N}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}\|x^\dagger\|_X^{\frac{1}{\nu+1}}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\|R_{\alpha_\tau(\delta,y^\delta)}y^\delta - x^\dagger\|_X &\le \|R_{\alpha_\tau(\delta,y^\delta)}y^\delta - x_{N(\delta)}\|_X + \|x_{N(\delta)} - x^\dagger\|_X\\ &\le c_{\tau,\nu}\left(\frac{\delta}{\sigma_{N(\delta)}}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}\left(\|x^\dagger\|_X\right)^{\frac{1}{\nu+1}} + \|x_{N(\delta)} - x^\dagger\|_X,\end{aligned}$$

und es bleibt zu zeigen, dass sowohl $\delta\sigma_{N(\delta)}^{-1} \to 0$ als auch $x_{N(\delta)} \to x^\dagger$ für $\delta \to 0$ gehen. Da $N(\delta)$ eine monotone Funktion von δ ist, müssen wir nur zwei Fälle unterscheiden:

(i) $N(\delta)$ ist beschränkt und damit konvergent, es existiert also ein $N_0 < \infty$ mit $N(\delta) \to N_0$ für $\delta \to 0$. In diesem Fall ist offensichtlich $\delta\sigma_{N(\delta)}^{-1} \le \delta\sigma_{N_0}^{-1} \to 0$. Aus der Wahl von $N(\delta)$ nach (4.10) folgt weiter

$$\sigma_{N_0}\|x^\dagger - x_{N_0}\|_X = \lim_{\delta\to 0}\sigma_N(\delta)\|x^\dagger - x_{N(\delta)}\|_X \le \lim_{\delta\to 0}\frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0}\delta = 0,$$

und damit wegen $\sigma_{N_0} > 0$ auch $x_{N(\delta)} \to x_{N_0} = x^\dagger$.

(ii) $N(\delta)$ ist unbeschränkt, d. h. $N(\delta) \to \infty$ für $\delta \to 0$. Dann folgt sofort $x_{N(\delta)} \to x^\dagger$. Wegen (4.10) gilt weiter

$$\frac{\delta}{\sigma_{N(\delta)}} < \frac{\tau + \tau_0}{\tau - \tau_0}\frac{\sigma_{N(\delta)-1}}{\sigma_{N(\delta)}}\|x_{N(\delta)-1} - x^\dagger\|_X \to 0,$$

da der vorletzte Term wegen $\sigma_{N(\delta)} \to 0$ beschränkt bleiben muss.

Also gilt $R_{\alpha_\tau(\delta,y^\delta)}y^\delta \to x^\dagger$ für alle $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\dagger\|_Y \le \delta$, und (R_α, α_τ) ist ein Regularisierungsverfahren. □

Schließlich soll noch erwähnt sein, dass es auch schwächere Quellbedingungen mit allgemeineren *Indexfunktionen* φ als Potenzen von K^*K gibt. Ein Beispiel sind *logarithmische Quellbedingungen* der Form $x^\dagger \in \mathcal{R}(-\ln|K|)$, die für exponentiell schlecht gestellte Probleme günstiger sind; siehe z. B. [Hohage 2000].

5 SPEKTRALE REGULARISIERUNG

Wir haben gesehen, dass die Regularisierung einer schlechtgestellten Operatorgleichung $Tx = y$ darin besteht, die (unbeschränkte) Moore–Penrose-Inverse $T^\dagger$ durch eine Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ von Operatoren zu ersetzen, die für jedes $\alpha > 0$ stetig auf ganz Y sind und für $\alpha \to 0$ punktweise auf $\mathcal{D}(T^\dagger)$ gegen $T^\dagger$ konvergieren. Für kompakte Operatoren $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ lassen sich solche Regularisierungen mit Hilfe der Singulärwertzerlegung konstruieren. Dafür verwenden wir, dass nach Satz 3.6 für $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ gilt

$$K^\dagger y = (K^*K)^\dagger K^* y.$$

Sei nun $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von K. Dann ist nach Konstruktion insbesondere $\{(\sigma_n^2, v_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von K^*K, und wir können nach Satz 3.10 schreiben

$$\begin{aligned}(K^*K)^\dagger K^* y &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2} \,(K^*y, v_n)_X \, v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^{-2}\sigma_n \,(y, u_n)_Y \, v_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\sigma_n^2)\sigma_n \,(y, u_n)_Y \, v_n\end{aligned}$$

mit $\varphi(\lambda) = \lambda^{-1}$. Die Unstetigkeit von $K^\dagger$ rührt nun daher, dass φ auf $(0, \|K^*K\|_{\mathcal{L}(X,X)}]$ unbeschränkt ist, denn $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Um zu regularisieren, ersetzen wir deshalb φ durch eine Familie $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ von *beschränkten* Funktionen, die punktweise gegen φ konvergieren. Wir schreiben hier und in Folge kurz $\kappa := \|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|K^*K\|_{\mathcal{L}(X,X)}$.

Definition 5.1. Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ eine Familie von stückweise stetigen und beschränkten Funktionen $\varphi_\alpha : (0, \kappa] \to \mathbb{R}$. Gilt

(i) $\lim_{\alpha\to 0} \varphi_\alpha(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda \in (0, \kappa]$ und

(ii) $\lambda|\varphi_\alpha(\lambda)| \leq C_\varphi$ für ein $C_\varphi > 0$ und alle $\lambda \in [0, \kappa]$ und $\alpha > 0$,

so heißt $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ *(regularisierender) Filter.*

Die Idee ist dann, als Regularisierungsoperator $R_\alpha := \varphi_\alpha(K^*K)K^*$ zu wählen, was in Folge stets der Fall sein soll.

5.1 REGULARISIERUNG

Wir zeigen zuerst, dass für einen regularisierenden Filter φ_α durch $\{\varphi_\alpha(K^*K)K^*\}_{\alpha>0}$ tatsächlich eine Regularisierung von $K^\dagger$ definiert wird. Nach (3.9) gilt für alle $y \in Y$

$$\begin{aligned} R_\alpha y = \varphi_\alpha(K^*K)K^*y &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\,(K^*y, v_n)_Y\, v_n + \varphi_\alpha(0)P_{\mathcal{N}}K^*y \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n\,(y, u_n)_Y\, v_n, \end{aligned}$$

da φ_α beschränkt und $K^*y \in \overline{\mathcal{R}(K^*)} = \mathcal{N}(K)^\perp$ ist. Wegen der geforderten Beschränktheit von φ_α ist R_α für $\alpha > 0$ auch stetig; vergleiche (3.10).

Vorab betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 5.2. (i) Die *abgeschnittene Singulärwertzerlegung* entsteht durch die Wahl

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{falls } \lambda \geq \alpha, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist φ_α beschränkt (durch $\frac{1}{\alpha}$) und stückweise stetig, konvergiert für $\lambda > 0$ und $\alpha \to 0$ gegen $\frac{1}{\lambda}$ und erfüllt die Beschränktheitsbedingung für $C_\varphi = 1$. Der zugehörige Regularisierungsoperator ist gegeben durch

$$R_\alpha y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n\,(y, u_n)_Y\, v_n = \sum_{\sigma_n \geq \sqrt{\alpha}} \frac{1}{\sigma_n}\,(y, u_n)_Y\, v_n, \tag{5.1}$$

woraus sich auch der Name ergibt.

(ii) Die *Tikhonov-Regularisierung* entsteht durch die Wahl

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}.$$

Wiederum ist φ_α beschränkt (durch $\frac{1}{\alpha}$) und stetig, konvergiert für $\lambda > 0$ und $\alpha \to 0$ gegen $\frac{1}{\lambda}$ und erfüllt die Beschränktheitsbedingung für $C_\varphi = 1$. Der zugehörige Regularisierungsoperator ist gegeben durch

$$R_\alpha y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha}\,(y, u_n)_Y\, v_n,$$

die regularisierte Lösung $x_\alpha := \varphi_\alpha(K^*K)K^*y$ lässt sich jedoch auch ohne Kenntnis einer Singulärwertzerlegung berechnen. Wir werden sie daher im nächsten Kapitel ausführlicher betrachten.

(iii) Die *Landweber-Regularisierung* entsteht durch die Wahl

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \frac{1 - (1 - \omega\lambda)^{1/\alpha}}{\lambda}$$

für ein geeignetes $\omega > 0$. Auch hier existiert eine (intuitivere) Charakterisierung ohne Singulärwertzerlegung, weshalb wir die nähere Betrachtung auf ein folgendes Kapitel verschieben.

Wir werden im weiteren Verlauf die folgenden beiden Abschätzungen benötigen.

Lemma 5.3. *Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein regularisierender Filter. Dann gilt*

$$\|KR_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)|\sigma_n^2 \le C_\varphi \qquad \textit{für alle } \alpha > 0.$$

Beweis. Für alle $y \in Y$ und $\alpha > 0$ gilt

$$KR_\alpha y = K\varphi_\alpha(K^*K)K^*y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n\,(y, u_n)_y\,Kv_n \tag{5.2}$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2\,(y, u_n)_y\,u_n.$$

Mit der Besselschen Ungleichung (2.1) folgt daher

$$\|KR_\alpha y\|_Y^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n\,(y,u_n)_y\,|^2 \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |\,(y,u_n)_Y\,|^2$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2|^2\|y\|_Y^2.$$

Die zweite Ungleichung folgt nun aus $0 < \sigma_n^2 \le \sigma_1^2 = \|K^*K\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \kappa$ und der Eigenschaft (ii) von regularisierenden Filtern. □

Lemma 5.4. *Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein regularisierender Filter. Dann gilt*

$$\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \le \sqrt{C_\varphi} \sup_{\lambda\in(0,\kappa]} \sqrt{|\varphi_\alpha(\lambda)|} \qquad \textit{für alle } \alpha > 0.$$

Insbesondere ist $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} < \infty$.

Beweis. Für alle $y \in Y$ und $\alpha > 0$ folgt aus Lemma 5.3

$$\|R_\alpha y\|_X^2 = (R_\alpha y, R_\alpha y)_X = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n\,(y,u_n)_Y\,(R_\alpha y, v_n)_X$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\,(y,u_n)_Y\,(KR_\alpha y, u_n)_Y$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)|\,\left(KR_\alpha y, \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (y,u_n)_Y\,u_n\right)_Y$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)|\,\|KR_\alpha y\|_X \|P_{\overline{\mathcal{R}(K^*)}}y\|_Y$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_\alpha(\sigma_n^2)|\,C_\varphi\|y\|_Y^2.$$

Supremum über alle $y \in Y$ sowie die Beschränktheit von φ_α ergeben nun die Behauptung. □

Wir zeigen nun die punktweise Konvergenz.

Satz 5.5. *Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein regularisierender Filter. Dann gilt*

$$\lim_{\alpha\to 0} R_\alpha y = K^\dagger y \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(K^\dagger),$$

d. h. $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ ist eine Regularisierung.

Für $y \notin \mathcal{D}(K^\dagger)$ gilt dagegen $\lim_{\alpha\to 0} \|R_\alpha y\|_X = \infty$, falls $K^\dagger$ nicht stetig ist.

Beweis. Sei $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ und setze $x^\dagger := K^\dagger y$ sowie $x_\alpha := R_\alpha y$. Wegen $K^*Kx^\dagger = K^*y$ nach Satz 3.6 können wir auch schreiben

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(K^*K)K^*y = \varphi_\alpha(K^*K)K^*Kx^\dagger.$$

Definieren wir $r_\alpha(\lambda) := 1 - \lambda\varphi_\alpha(\lambda)$, so folgt

$$x^\dagger - x_\alpha = (\mathrm{Id} - \varphi_\alpha(K^*K)K^*K)x^\dagger = r_\alpha(K^*K)x^\dagger = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_\alpha(\sigma_n^2)\left(x^\dagger, v_n\right)_X v_n \tag{5.3}$$

und damit

$$\|x^\dagger - x_\alpha\|_X^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_\alpha(\sigma_n^2)^2 \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2.$$

Diese Darstellung werden wir öfter verwenden. Da $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein regularisierender Filter ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0} r_\alpha(\lambda) &= 0 && \text{für alle } \lambda \in (0,\kappa], \\ |r_\alpha(\lambda)| &\le 1 + C_\varphi && \text{für alle } \lambda \in [0,\kappa] \text{ und } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Wegen der Besselschen Ungleichung existiert nun für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2(1+C_\varphi)^2}.$$

Weiterhin existiert wegen der punktweisen Konvergenz von $\{r_\alpha\}_{\alpha>0}$ – die daher gleichmäßig ist auf der endlichen Menge $\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2\}$ – ein $\alpha_0 > 0$ mit

$$r_\alpha(\sigma_n^2)^2 < \frac{\varepsilon^2}{2\|x^\dagger\|_X^2} \qquad \text{für alle } n \le N \text{ und } \alpha < \alpha_0.$$

Für alle $\alpha < \alpha_0$ gilt daher

$$\begin{aligned}
\|x^\dagger - x_\alpha\|_X^2 &= \sum_{n=1}^{N} r_\alpha(\sigma_n^2)^2 \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} r_\alpha(\sigma_n^2)^2 \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{2\|x^\dagger\|_X^2} \sum_{n=1}^{N} \left|\left(x^\dagger, v_n\right)_X\right|^2 + (1 + C_\varphi)^2 \frac{\varepsilon^2}{2(1 + C_\varphi)^2} \\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

d. h. $\|x^\dagger - x_\alpha\|_X \to 0$ für $\alpha \to 0$. Zusammen mit der Stetigkeit von R_α für $\alpha > 0$ aus Lemma 5.4 folgt, dass $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ nach Definition 4.1 eine Regularisierung ist.

Die Unbeschränktheit für $y \notin \mathcal{D}(K^\dagger)$ folgt aus Satz 4.3 und Lemma 5.3. □

5.2 PARAMETERWAHL UND KONVERGENZRATEN

Wir untersuchen nun, welche Parameterwahlstrategien für einen gegebenen Filter zu einem konvergenten (und ordnungsoptimalen) Regularisierungsverfahren führen.

A PRIORI-STRATEGIEN

Nach Satz 4.6 liefert jede a priori-Strategie mit $\alpha(\delta) \to 0$ und $\delta\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \to 0$ für $\delta \to 0$ ein Regularisierungsverfahren (R_α, α). Zusammen mit Lemma 5.4 erhält man daraus eine Bedingung für φ_α und damit für α. Zum Beispiel ist für die abgeschnittene Singulärwertzerlegung

$$\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sqrt{C_\varphi} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{|\varphi_\alpha(\sigma_n^2)|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Dies liefert eine Bedingung für den minimalen Singulärwert, den wir für ein gegebenes $\delta > 0$ in (5.1) berücksichtigen dürfen.

Beispiel 5.6 (Abgeschnittene Singulärwertzerlegung). Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit singulärem System $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wähle für $\delta > 0$ ein $n(\delta)$ mit

$$n(\delta) \to \infty, \qquad \frac{\delta}{\sigma_{n(\delta)}} \to 0 \qquad \text{für } \delta \to 0.$$

Dann ergibt die abgeschnittene Singulärwertzerlegung zusammen mit der Parameterwahlstrategie $\alpha(\delta) := \sigma_{n(\delta)}^2$ ein Regularisierungsverfahren.

Dies gilt insbesondere für die Wahl $\alpha(\delta) := \sigma^2_{n(\delta)} \geq \delta > \sigma^2_{n(\delta)+1}$, für die gilt

$$R_{\alpha(\delta)} y^\delta = \sum_{\sigma_n \geq \sqrt{\delta}} \frac{1}{\sigma_n} \left(y^\delta, u_n\right)_Y v_n \to x^\dagger \qquad \text{für } \delta \to 0.$$

Wir betrachten nun Konvergenzraten unter der Quellbedingung $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$ für $\nu, \rho > 0$. Wir gehen dafür wie im Beweis von Satz 5.5 vor und zeigen zunächst, dass

$$\omega_\nu(\alpha) := \sup_{\lambda \in (0,\kappa]} \lambda^{\nu/2} |r_\alpha(\lambda)|$$

eine obere Schranke für den Verfahrensfehler darstellt.

Lemma 5.7. *Sei $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ und $x^\dagger = K^\dagger y \in X_{\nu,\rho}$. Dann gilt für alle $\alpha > 0$ und $x_\alpha = R_\alpha y$*

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x^\dagger\|_X &\leq \omega_\nu(\alpha)\rho, \\ \|Kx_\alpha - Kx^\dagger\|_Y &\leq \omega_{\nu+1}(\alpha)\rho. \end{aligned}$$

Beweis. Für $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$ existiert ein $w \in X$ mit $x^\dagger = |K|^\nu w = (K^*K)^{\nu/2} w$ und $\|w\|_X \leq \rho$. Wie im Beweis von Satz 5.5 folgt nun

$$\begin{aligned} x^\dagger - x_\alpha &= r_\alpha(K^*K)x^\dagger = r_\alpha(K^*K)(K^*K)^{\nu/2} w \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} r_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^\nu \,(w, v_n)_X\, v_n \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - x^\dagger\|_X^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |r_\alpha(\sigma_n^2)|^2 \sigma_n^{2\nu} |\,(w, v_n)_X\,|^2 \\ &\leq \omega_\nu(\alpha)^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |\,(w, v_n)_X\,|^2 \leq \omega_\nu(\alpha)^2 \|w\|_X^2 \leq \omega_\nu(\alpha)^2 \rho^2. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.12 (iii) gilt weiterhin

$$\|Kx_\alpha - Kx^\dagger\|_Y = \|K(x_\alpha - x^\dagger)\|_Y = \||K|(x_\alpha - x^\dagger)\|_X,$$

woraus analog mit

$$\begin{aligned} |K|(x^\dagger - x_\alpha) &= (K^*K)^{1/2} r_\alpha(K^*K)(K^*K)^{\nu/2} w \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n r_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^\nu \,(w, v_n)_X\, v_n \end{aligned}$$

und $|r_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^{\nu+1}|^2 \leq \omega_{\nu+1}(\alpha)^2$ die zweite Abschätzung folgt. □

Damit haben wir jetzt alles zusammen, um Konvergenzraten zu zeigen.

Satz 5.8. *Sei $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ und $x^\dagger = K^\dagger y \in X_{\nu,\rho}$. Sei $\alpha(\delta)$ eine Parameterwahlstrategie mit*

$$c\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{\nu+1}} \leq \alpha(\delta) \leq C\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{\nu+1}} \qquad \text{für } c, C > 0$$

und α klein genug. Erfüllt der Filter $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ die Bedingungen

$$\sup_{\lambda\in(0,\kappa]} |\varphi_\alpha(\lambda)| \leq C_\varphi \alpha^{-1}, \tag{5.4}$$

$$\omega_\nu(\alpha) \leq C_\nu \alpha^{\nu/2}, \tag{5.5}$$

für eine Konstante $C_\nu > 0$ und δ klein genug, so ist (R_α, α) ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren.

Beweis. Nach Satz 4.14 genügt es, die Ordnungsoptimalität zu zeigen. Wir verwenden wieder die Zerlegung (4.2) in Datenfehler und Verfahrensfehler: Sei $\delta > 0$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y^\delta - y\|_Y \leq \delta$ gegeben und setze $x_{\alpha(\delta)} = R_{\alpha(\delta)}y$. Dann gilt

$$\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - K^\dagger y\|_X \leq \delta\|R_{\alpha(\delta)}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \|x_{\alpha(\delta)} - x^\dagger\|_X.$$

Nach Lemma 5.4 und Annahme (5.4) ist nun

$$\|R_{\alpha(\delta)}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sqrt{C_\varphi}\sqrt{C_\varphi \alpha(\delta)^{-1}} \leq C_\varphi \alpha(\delta)^{-1/2}.$$

Analog folgt aus Lemma 5.7 und Annahme (5.5)

$$\|x_{\alpha(\delta)} - x^\dagger\|_X \leq \omega_\nu(\alpha(\delta))\rho \leq C_\nu \alpha(\delta)^{\nu/2}\rho.$$

Zusammen mit der Parameterwahlstrategie erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
\|R_{\alpha(\delta)}y^\delta - K^\dagger y\|_X &\leq C_\varphi \alpha(\delta)^{-1/2}\delta + C_\nu \alpha(\delta)^{\nu/2}\rho \\
&\leq C_\varphi c^{-1/2}\delta^{-\frac{1}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}\delta + C_\nu C^{\nu/2}\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{-\frac{\nu}{\nu+1}}\rho \\
&= (C_\varphi c^{-1/2} + C_\nu C^{\nu/2})\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}},
\end{aligned}$$

und damit die Ordnungsoptimalität. □

Um für einen konkreten Filter die Ordnungsoptimalität für ein $\nu > 0$ zu zeigen, genügt es also, für dieses ν die Bedingungen (5.4) und (5.5) nachzuweisen. Das maximale $\nu_0 > 0$, so dass für alle $\nu \in (0, \nu_0]$ die Bedingung (5.5) gilt, heißt *Qualifikation* des Filters.

Beispiel 5.9 (Abgeschnittene Singulärwertzerlegung). Wegen

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{falls } \lambda \geq \alpha, \\ 0 & \text{falls } \lambda < \alpha. \end{cases}$$

und $C_\varphi = 1$ ist

$$\sup_{\lambda \in (0,\kappa]} |\varphi_\alpha(\lambda)| \leq \alpha^{-1},$$

und damit ist Bedingung (5.4) erfüllt.

Weiterhin gilt für alle $\nu > 0$ und $\lambda \in (0, \kappa]$

$$\lambda^{\nu/2}|r_\alpha(\lambda)| = \lambda^{\nu/2}|1 - \lambda\varphi_\alpha(\lambda)| = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda \geq \alpha, \\ \lambda^{\nu/2} & \text{falls } \lambda < \alpha. \end{cases}$$

Damit ist für $\alpha \leq \kappa$

$$\omega_\nu(\alpha) = \sup_{\lambda \in (0,\kappa]} \lambda^{\nu/2}|r_\alpha(\lambda)| \leq \alpha^{\nu/2},$$

die Bedingung (5.5) ist also für alle $\nu > 0$ mit $C_\nu = 1$ erfüllt. Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung ist für alle $\nu > 0$ ordnungsoptimal; man sagt daher, sie besitzt *unendliche Qualifikation.*

A POSTERIORI-STRATEGIEN

Wir betrachten wieder das Diskrepanzprinzip: Für $\tau > 1$ sei $\alpha(\delta, y^\delta)$ so bestimmt, dass gilt

$$\|Kx^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)} - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|Kx^\delta_\alpha - y^\delta\|_Y \qquad \text{für alle } \alpha > \alpha(\delta, y^\delta). \tag{5.6}$$

Wieder nehmen wir an, dass $\mathcal{R}(K)$ dicht in Y ist, und zusätzlich, dass $\alpha \mapsto \|Kx^\delta_\alpha - y^\delta\|_Y$ linksseitig stetig ist. Wegen Lemma 5.3 folgt dann aus Satz 4.7, dass so ein $\alpha(\delta, y^\delta)$ stets existiert. Um zu zeigen, dass das Diskrepanzprinzip zu einem Regularisierungsverfahren führt, verwenden wir Satz 4.14.

Satz 5.10. *Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein Filter mit Qualifikation $\nu_0 > 0$ und gelte (5.4), (5.5), sowie*

$$\tau > \sup_{\alpha>0, \lambda\in(0,\kappa]} |r_\alpha(\lambda)| =: C_r. \tag{5.7}$$

Dann definiert das Diskrepanzprinzip für alle $\nu \in (0, \nu_0 - 1]$ ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren (R_α, α).

Beweis. Zuerst halten wir fest, dass wegen $|r_\alpha(\lambda)| \leq 1 + C_\varphi$ für alle $\alpha > 0$ und $\lambda \in (0, \kappa]$ stets ein $\tau > 1$ mit (5.7) existiert.

Sei nun $y \in \mathcal{R}(K)$, $x^\dagger = K^\dagger y \in X_{\nu,\rho}$ für ein $\nu \in (0, \nu_0 - 1]$ und $\rho > 0$ und setze $x_\alpha^\delta = R_{\alpha(\delta,y^\delta)} y^\delta$ für $y^\delta \in Y$ mit $\|y^\delta - y\|_Y \leq \delta$. Wir verwenden wieder die Zerlegung

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X \leq \|x_\alpha - x^\dagger\|_X + \|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|_X \tag{5.8}$$

mit $x_\alpha = R_{\alpha(\delta,y^\delta)} y$ und schätzen die Summanden separat ab.

Für den ersten Term verwenden wir wieder die Darstellung (5.3) sowie die Quelldarstellung $x^\dagger = |K|^\nu w$ und erhalten

$$\begin{aligned} x^\dagger - x_\alpha &= \sum_{n\in\mathbb{N}} r_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^\nu (w, v_n)_X\, v_n \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} r_\alpha(\sigma_n^2)\,(w, v_n)_X\, |K|^\nu v_n \\ &= |K|^\nu \sum_{n\in\mathbb{N}} r_\alpha(\sigma_n^2)\,(w, v_n)_X\, v_n =: |K|^\nu \xi. \end{aligned}$$

Die Interpolationsungleichung (3.11) mit $r = \nu$, $s = \nu + 1$ liefert dann

$$\|x_\alpha - x^\dagger\|_X = \||K|^\nu \xi\|_X \leq \||K|^{\nu+1}\xi\|_X^{\frac{\nu}{\nu+1}} \,\|\xi\|_X^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Für den zweiten Faktor erhalten wir aus der Definition von ξ zusammen mit der Besselschen Ungleichung, der Beschränktheit von r_α und der Quellbedingung

$$\|\xi\|_X^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |r_\alpha(\sigma_n^2)|^2 |\,(w, v_n)_X\,|^2 \leq C_r^2 \|w\|_X^2 \leq C_r^2 \rho^2.$$

Für den ersten Faktor verwenden wir Lemma 3.12 (i), (iii), und die produktive Null:

$$\begin{aligned} \||K|^{\nu+1}\xi\|_X &= \||K|(|K|^\nu \xi)\|_X = \||K|(x_\alpha - x^\dagger)\|_X = \|K(x_\alpha - x^\dagger)\|_Y = \|Kx_\alpha - y\|_Y \\ &\leq \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y + \|y - y^\delta - K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)\|_Y. \end{aligned}$$

Wieder schätzen wir separat ab: wegen der Wahl von $\alpha(\delta, y^\delta)$ nach dem Diskrepanzprinzip ist zuerst $\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta$. Für den zweiten Summanden gehen wir wie folgt vor: Es gilt

$$y - Kx_\alpha = y - KR_\alpha y = (\mathrm{Id} - K\varphi_\alpha(K^*K)K^*)y$$

und analog für $y^\delta - Kx_\alpha^\delta$. Also ist

$$\begin{aligned} \|y - y^\delta - K(x_\alpha - x_\alpha^\delta)\|_Y^2 &= \|(\mathrm{Id} - K\varphi_\alpha(K^*K)K^*)(y - y^\delta)\|_Y^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |r_\alpha(\sigma_n^2)\,|^2 \left| \left(y - y^\delta, u_n\right)_Y \right|^2 \\ &\leq C_r^2 \delta^2, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung verwendet wurde, dass gilt (vergleiche (5.2))

$$K\varphi_\alpha(K^*K)K^*(y-y^\delta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_\alpha(\sigma_n^2)\sigma_n^2 \left(y-y^\delta, u_n\right)_Y u_n.$$

Insgesamt erhalten wir also für den ersten Term in (5.8)

$$\|x_\alpha - x^\dagger\|_X \leq (\tau + C_r)^{\frac{\nu}{\nu+1}}\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}C_r^{\frac{1}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}} =: C_1\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Für den zweiten Term in (5.8) verwenden wir Lemma 5.4 und Annahme (5.4) und erhalten

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|_X &= \|R_\alpha(y^\delta - y)\|_X \leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\delta \\ &\leq \sqrt{C_\varphi} \sup_{\lambda\in(0,\kappa]} \sqrt{|\varphi_\alpha(\lambda)|}\delta \\ &\leq C_\varphi \alpha(\delta, y^\delta)^{-1/2}\delta. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Um auf die gewünschte Ordnung zu kommen, brauchen wir nun eine Abschätzung für $\alpha(\delta, y^\delta)$. Aufgrund der Wahl nach dem Diskrepanzprinzip gilt

$$\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|Kx_{2\alpha}^\delta - y^\delta\|_Y \leq \|Kx_{2\alpha} - y\|_Y + \|y - y^\delta - K(x_{2\alpha} - x_{2\alpha}^\delta)\|_Y.$$

Für den zweiten Term erhalten wir wie oben

$$\|y - y^\delta - K(x_{2\alpha} - x_{2\alpha}^\delta)\|_Y \leq C_r\delta.$$

Für den ersten Term schätzen wir mit Lemma 5.7 und Annahme (5.5) ab, wobei wir $\nu+1 \leq \nu_0$ verwenden:

$$\|Kx_{2\alpha} - y\|_Y \leq \omega_{\nu+1}(2\alpha(\delta, y^\delta))\rho \leq C_{\nu+1}(2\alpha(\delta, y^\delta))^{\frac{\nu+1}{2}}\rho.$$

Nun ist nach Annahme (5.7) $\tau - C_r > 0$, wir erhalten also

$$\|Kx_{2\alpha} - y\|_Y > \tau\delta - \|y - y^\delta - K(x_{2\alpha} - x_{2\alpha}^\delta)\|_Y \geq (\tau - C_r)\delta$$

und damit

$$\delta \leq (\tau - C_r)^{-1}C_{\nu+1}2^{\frac{\nu+1}{2}}\alpha(\delta, y^\delta)^{\frac{\nu+1}{2}}\rho =: C_\tau\alpha(\delta, y^\delta)^{\frac{\nu+1}{2}}\rho$$

d. h.

$$\alpha(\delta, y^\delta)^{-\frac{1}{2}} \leq C_\tau^{\frac{1}{\nu+1}}\delta^{-\frac{1}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}. \tag{5.10}$$

Einsetzen in (5.9) ergibt dann

$$\|x_\alpha^\delta - x_\alpha\|_X \leq C_\varphi C_\tau^{\frac{1}{\nu+1}}\delta\delta^{-\frac{1}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}} =: C_2\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Zusammen folgt

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X \leq (C_1 + C_2)\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}$$

und damit die Ordnungsoptimalität. Aus Satz 4.14 für $\nu = \nu_0 - 1$ und $\tau_0 = C_r$ folgt damit auch, dass R_α zusammen mit dem Diskrepanzprinzip in Form der Parameterwahlstrategie $\alpha_\tau = \alpha(\tau\delta, y^\delta)$ ein Regularisierungsverfahren definiert. □

Beispiel 5.11 (Abgeschnittene Singulärwertzerlegung). Hier gilt

$$|r_\alpha(\lambda)| = \begin{cases} 1 - \lambda\frac{1}{\lambda} = 0 & \lambda \geq \alpha \\ 1 & \lambda < \alpha \end{cases}$$

und damit $C_r = 1$. Wegen der unendlichen Qualifikation ist daher die abgeschnittene Singulärwertzerlegung zusammen mit dem Diskrepanzprinzip für beliebige $\tau > 1$ und $\nu > 0$ ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren.

Hat ein Filter jedoch nur endliche Qualifikation, führt das Diskrepanzprinzip für $\nu > \nu_0 - 1$ nicht zu einem ordnungsoptimalen Regularisierungsverfahren. Es gibt jedoch verbesserte Diskrepanzprinzipien, die das Residuum in angepassten Normen messen und dadurch zu ordnungsoptimalen Verfahren auch für $\nu \in (\nu_0 - 1, \nu_0]$ führen; siehe z. B. [Engl, Hanke u. a. 1996, Kapitel 4.4].

HEURISTISCHE STRATEGIEN

Wir betrachten als Beispiel die Hanke–Raus-Regel: Betrachte für $y^\delta \in Y$ die Funktion

$$\Psi : (0, \kappa] \to \mathbb{R}, \qquad \Psi(\alpha) = \frac{\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y}{\sqrt{\alpha}},$$

wobei wieder $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ ist, und wähle

$$\alpha(y^\delta) = \arg \min_{\alpha \in (0,\kappa]} \Psi(\alpha). \tag{5.11}$$

Wir nehmen in Folge an, dass $y \in \mathcal{R}(K)$ sowie $\|y\|_Y > \delta$ gelten. Wir zeigen zunächst eine bedingte Fehlerabschätzung.

Satz 5.12. *Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein Filter mit Qualifikation $\nu_0 > 0$ und gelte (5.4) sowie (5.5). Sei weiterhin $\alpha^* := \alpha(y^\delta) > 0$ und*

$$\delta^* := \|Kx_{\alpha^*}^\delta - y^\delta\|_Y > 0. \tag{5.12}$$

Dann existiert ein $c > 0$ so dass für alle δ klein genug und $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$, $\nu \in (0, \nu_0 - 1]$ und $\rho \geq 0$, gilt

$$\|x_{\alpha^*}^\delta - x^\dagger\|_X \leq c\left(1 + \frac{\delta}{\delta^*}\right)\max\{\delta, \delta^*\}^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Beweis. Wir verwenden wieder die Zerlegung

$$\|x_{\alpha^*}^\delta - x^\dagger\|_X \leq \|x_{\alpha^*} - x^\dagger\|_X + \|x_{\alpha^*}^\delta - x_{\alpha^*}\|_X.$$

Für den ersten Term erhalten wir wie im Beweis von Satz 5.10 mit (5.12) anstelle des Diskrepanzprinzips

$$\|x_{\alpha^*} - x^\dagger\|_X \le C_r^{\frac{1}{\nu+1}}(\delta^* + C_r\delta)^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}} \le C_1 \max\{\delta,\delta^*\}^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}. \tag{5.13}$$

für eine Konstante $C_1 > 0$.

Für den zweiten Term erhalten wir analog nach (5.9) mit Hilfe von (5.12) (in Form der produktiven $1 = \delta^*/\delta^*$)

$$\|x^\delta_{\alpha^*} - x_{\alpha^*}\|_X \le C_\varphi \frac{1}{\sqrt{\alpha^*}}\delta = C_\varphi \frac{\delta}{\delta^*}\frac{\|Kx^\delta_{\alpha^*} - y^\delta\|_Y}{\sqrt{\alpha^*}} = C_\varphi\frac{\delta}{\delta^*}\Psi(\alpha^*).$$

Für den letzten Faktor verwenden wir nun die Wahlregel (5.11): Es gilt $\Psi(\alpha^*) \le \Psi(\alpha)$ für alle $\alpha \in (0,\kappa]$. Die Idee ist nun, zum Vergleich das Diskrepanzprinzip heranzuziehen. Sei $\bar\alpha := \alpha(\delta, y^\delta)$ so gewählt, dass (5.6) erfüllt ist. Ist $\bar\alpha \le \kappa$, so gilt wegen (5.10)

$$\Psi(\alpha^*) \le \Psi(\bar\alpha) \le (\tau\delta)(C_\tau\delta^{-\frac{1}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}) = C_\tau\tau\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}. \tag{5.14}$$

Ist dagegen $\bar\alpha > \kappa = \|K\|^2_{\mathcal{L}(X,Y)}$, so ist $\|Kx^\delta_\kappa - y^\delta\|_Y \le \tau\delta$. Wegen

$$\delta < \|y\|_Y = \|Kx^\dagger\|_Y = \|K|K|^\nu w\|_X \le \|K\|^{\nu+1}_{\mathcal{L}(X,Y)}\rho$$

können wir daher abschätzen

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha^*) \le \Psi(\kappa) &\le \tau\delta\|K\|^{-1}_{\mathcal{L}(X,Y)} = \tau\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\delta^{\frac{1}{\nu+1}}\|K\|^{-1}_{\mathcal{L}(X,Y)}\\ &\le \tau\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\left(\|K\|^{\nu+1}_{\mathcal{L}(X,Y)}\rho\right)^{\frac{1}{\nu+1}}\|K\|^{-1}_{\mathcal{L}(X,Y)} = \tau\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{\nu}{\nu+1}}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

In beiden Fällen erhalten wir also

$$\|x^\delta_{\alpha^*} - x_{\alpha^*}\|_X \le C_2\frac{\delta}{\delta^*}\delta^{\frac{\nu}{\nu+1}}\rho^{\frac{1}{\nu+1}}$$

für eine Konstante $C_2 > 0$, und zusammen mit (5.13) folgt die gewünschte Abschätzung. □

Die Hanke–Raus-Regel wäre also ordnungsoptimal, falls $\delta^* \approx \delta$ gelten würde. Umgekehrt wird die Regel versagen für $\alpha^* = 0$ oder $\delta^* = 0$. In letzterem Fall wäre $y^\delta \in \mathcal{R}(K)$, und wegen der Unstetigkeit von $K^\dagger$ kann $\|K^\dagger y^\delta - K^\dagger y\|_Y$ beliebig groß sein. Diesen Fall müssen wir daher ausschließen, um weitere Aussagen treffen zu können. Wir nehmen zum Beispiel an, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$y^\delta \in \mathcal{N}_\varepsilon := \left\{y + \eta \in Y : \|(\mathrm{Id} - P_{\overline{\mathcal{R}}})\eta\|_Y \ge \varepsilon\|\eta\|_Y\right\}$$

gilt, wobei $P_{\overline{\mathcal{R}}}$ wieder die Projektion auf $\overline{\mathcal{R}(K)}$ bedeutet. Anschaulich bedeutet das, dass die gestörten Daten y^δ einen gleichmäßig nach unten beschränkten Anteil aus dem orthogonalen Komplement von $\overline{\mathcal{R}(K)}$ besitzen. Wenn wir uns auf solche Störungen beschränken, liefert die Hanke–Raus-Regel tatsächlich ein konvergentes Regularisierungsverfahren.

Satz 5.13. *Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha>0}$ ein Filter mit Qualifikation $\nu_0 > 0$ und gelte (5.4) sowie (5.5). Dann ist für $x^\dagger \in X_{\nu,\rho}$ für $\nu \in (0, \nu_0 - 1]$ und $\rho > 0$*

$$\limsup_{\delta\to 0} \left\{\|x^\delta_{\alpha^*} - x^\dagger\|_X : y^\delta \in \mathcal{N}_\varepsilon, \|y^\delta - y\|_Y \leq \delta\right\} = 0.$$

Beweis. Sei $y \in \mathcal{R}(K)$ und $y^\delta \in \mathcal{N}_\varepsilon$ mit $\|y^\delta - y\|_Y = \delta$. Da $\operatorname{Id} - P_{\overline{\mathcal{R}}}$ als orthogonale Projektion Norm 1 hat, gilt für alle $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \|Kx^\delta_\alpha - y^\delta\|_Y &\geq \|(\operatorname{Id} - P_{\overline{\mathcal{R}}})(Kx^\delta_\alpha - y^\delta)\|_Y = \|(\operatorname{Id} - P_{\overline{\mathcal{R}}})y^\delta\|_Y \\ &= \|(\operatorname{Id} - P_{\overline{\mathcal{R}}})(y^\delta - y)\|_Y \geq \varepsilon\|y^\delta - y\|_Y \\ &= \varepsilon\delta > 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Also ist der Zähler von $\Psi(\alpha)$ nach unten beschränkt, und daher gilt $\Psi(\alpha) \to \infty$ für $\alpha \to 0$. Das Infimum über alle $(0, \kappa]$ muss also für $\alpha^* > 0$ angenommen werden. Insbesondere folgt aus (5.16) auch

$$\delta^* = \|Kx^\delta_{\alpha^*} - y^\delta\|_Y \geq \varepsilon\delta > 0.$$

Satz 5.12 liefert daher mit $\delta \leq \varepsilon^{-1}\delta^*$ die Abschätzung

$$\|x^\delta_{\alpha^*} - x^\dagger\|_X \leq C_\varepsilon (\delta^*)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}}$$

für eine Konstante $C_\varepsilon > 0$. Es genügt also zu zeigen, dass für $\delta \to 0$ auch $\delta^* \to 0$ geht. Dies folgt aber aus $\alpha^* \leq \kappa$ und (5.14), (5.15), denn für $\delta \to 0$ gilt

$$\delta^* = \|Kx^\delta_{\alpha^*} - y^\delta\|_Y = \sqrt{\alpha^*}\Psi(\alpha^*) \leq \sqrt{\kappa}\Psi(\alpha^*) \leq \sqrt{\kappa} C_\tau \tau \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}} \rho^{\frac{1}{\nu+1}} \to 0 \qquad \square$$

Unter ähnlichen Annahmen kann man auch Ordnungsoptimalität für die Hanke–Raus-Regel zeigen sowie für verwandte Regeln, die auf der Minimierung von geeigneten Funktionalen beruhen; siehe etwa [Kindermann 2011].

6 TIKHONOV-REGULARISIERUNG

Aufgrund ihrer zentralen Rolle in der Theorie und Praxis der inversen Probleme betrachten wir noch einmal ausführlicher die Tikhonov-Regularisierung, die definiert wird durch die Filterfunktion

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha}.$$

Wir kommen schnell zur Sache, denn wir sind gut vorbereitet. Wie in Beispiel 5.2 (ii) bereits bemerkt, ist φ_α stetig, konvergiert für $\alpha \to 0$ gegen $\frac{1}{\lambda}$, ist gleichmäßig beschränkt durch α^{-1} und erfüllt

$$\lambda\varphi_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} < 1 =: C_\varphi \qquad \text{für alle } \alpha > 0.$$

Damit ist $R_\alpha = \varphi_\alpha(K^*K)K^*$ ein Regularisierungsoperator mit

$$\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

der zusammen mit der a priori-Strategie $\alpha(\delta) = \delta$ ein konvergentes Regularisierungsverfahren ergibt.

Um Konvergenzraten zu zeigen, verwenden wir Satz 5.8 bzw. Satz 5.10. Zunächst ist wegen $\varphi_\alpha(\lambda) \leq \alpha^{-1}$ für alle $\alpha > 0$ die Bedingung (5.4) erfüllt mit $C_\varphi = 1$. Weiterhin ist

$$r_\alpha(\lambda) = 1 - \lambda\varphi_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \leq 1 =: C_r \qquad \text{für alle } \alpha > 0, \lambda \in (0, \kappa].$$

Um die zweite Bedingung (5.5) nachzuweisen, müssen wir

$$\omega_\nu(\alpha) = \lambda^{\nu/2}|r_\alpha(\lambda)| = \frac{\lambda^{\nu/2}\alpha}{\lambda + \alpha}$$

durch $C_\nu\alpha^{\nu/2}$ für eine Konstante $C_\nu > 0$ abschätzen. Dafür betrachten wir die rechte Seite für festes $\alpha > 0$ als eine Funktion $h_\alpha(\lambda)$ und berechnen

$$h'_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha\frac{\nu}{2}\lambda^{\nu/2-1}(\lambda + \alpha) - \alpha\lambda^{\nu/2}}{(\lambda + \alpha)^2} = \frac{\alpha\lambda^{\nu/2-1}}{(\lambda + \alpha)^2}\left(\frac{\nu}{2}\alpha + \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\lambda\right).$$

Für $\nu \geq 2$ ist daher $h_\alpha(\lambda)$ monoton wachsend in λ, und das Maximum über alle $\lambda \in (0, \kappa]$ wird für $\lambda = \kappa$ angenommen. In diesem Fall ist

$$\omega_\nu(\alpha) \leq h_\alpha(\kappa) = \frac{\alpha\kappa^{\nu/2}}{\kappa + \alpha} \leq \kappa^{\nu/2-1}\alpha.$$

Die rechte Seite hat also nur für $\nu = 2$ die gewünschte Ordnung.

Für $\nu \in (0,2)$ können wir die Nullstelle von $h'_\alpha(\lambda)$ bestimmen als $\lambda^* = \frac{\alpha\frac{\nu}{2}}{1-\frac{\nu}{2}}$. Dort ist $h''_\alpha(\lambda^*) < 0$, also ist für alle $\alpha > 0$

$$\omega_\nu(\alpha) \le h_\alpha(\lambda^*) = \frac{\alpha\left(\alpha\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)^{-1}\right)^{\nu/2}}{\alpha + \alpha\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)^{-1}} \le \left(\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)^{-1}\right)^{\nu/2}\alpha^{\nu/2},$$

womit wir die gewünschte Ordnung erhalten.

Die Tikhonov-Regularisierung hat also mindestens (und wie wir zeigen werden, höchstens) Qualifikation $\nu_0 = 2$. Aus Satz 5.8 und Satz 5.10 folgt nun die Ordnungsoptimalität für a priori- und a posteriori-Strategien.

Folgerung 6.1. *Für alle $\nu \in (0,2]$ ist die Tikhonov-Regularisierung zusammen mit der Parameterwahlstrategie*

$$c\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{\nu+1}} \le \alpha(\delta) \le C\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{2}{\nu+1}} \qquad \text{für } c, C > 0$$

ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren. Insbesondere gilt für $\alpha \sim \delta^{2/3}$

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X \le c\delta^{\frac{2}{3}} \qquad \text{für alle } x^\dagger \in \mathcal{R}(K^*K).$$

Folgerung 6.2. *Für alle $\nu \in (0,1]$ und $\tau > 1$ ist die Tikhonov-Regularisierung zusammen mit der Parameterwahlstrategie*

$$\|Kx^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)} - y^\delta\|_Y \le \tau\delta < \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y \qquad \text{für alle } \alpha > \alpha(\delta, y^\delta)$$

ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren. Insbesondere gilt

$$\|x^\delta_{\alpha(\delta,y^\delta)} - x^\dagger\|_X \le c\delta^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für alle } x^\dagger \in \mathcal{R}(K^*).$$

Tatsächlich kann die Qualifikation nicht höher als 2 sein; die Tikhonov-Regularisierung *sättigt* im Gegensatz zur abgeschnittenen Singulärwertzerlegung. Um dies zu zeigen, leiten wir die in Beispiel 5.2 (ii) versprochene alternative Charakterisierung her.

Lemma 6.3. *Für $y \in Y$ und $\alpha > 0$ ist $x_\alpha := R_\alpha y$ eindeutig bestimmt als Lösung der Gleichung*

$$(K^*K + \alpha\,\mathrm{Id})x = K^*y. \tag{6.1}$$

Beweis. Wir verwenden das singuläre System $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ von K und erhalten

$$\alpha x_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha\frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\alpha}(y, u_n)_Y\, v_n$$

sowie

$$
\begin{aligned}
K^*Kx_\alpha &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\alpha}\,(y,u_n)_Y\, K^*Kv_n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n^2 \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\alpha}\,(y,u_n)_Y\, v_n.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$(K^*K+\alpha\,\mathrm{Id})x_\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n\,(y,u_n)_Y\, v_n = K^*y.$$

Sei umgekehrt $x \in X$ eine Lösung von (6.1). Einsetzen der Darstellung

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x,v_n)_X\, v_n + P_{\mathcal{N}}x \tag{6.2}$$

in (6.1) ergibt dann

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (\sigma_n^2+\alpha)\,(x,v_n)_X\, v_n + \alpha P_{\mathcal{N}}x = (K^*K+\alpha\,\mathrm{Id})x = K^*y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n\,(y,u_n)_Y\, v_n.$$

Da $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\overline{\mathcal{R}(K^*)} = \mathcal{N}(K)^\perp$ ist, muss $P_{\mathcal{N}}x = 0$ sein. Durch Koeffizientenvergleich folgt dann

$$(x,v_n)_X = \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\alpha}\,(y,u_n)_Y \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Einsetzen in (6.2) ergibt wiederum

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x,v_n)_X\, v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2+\alpha}\,(y,u_n)_Y\, v_n = x_\alpha,$$

d. h. x_α ist die eindeutige Lösung von (6.1). □

Der praktische Wert der Darstellung (6.1) kann nicht genug betont werden: Anstelle der Singulärwertzerlegung muss lediglich die Lösung einer *korrekt gestellten* linearen Gleichung (für einen selbstadjungierten und positiv definiten Operator) berechnet werden, wofür Standardverfahren eingesetzt werden können.

Wir zeigen nun, dass im Allgemeinen keine a priori-Strategie existieren kann, für die der Fehler $\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X$ schneller als $\delta^{2/3}$ gegen Null geht.

Satz 6.4. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit unendlichdimensionalem Bild und $y \in \mathcal{R}(K)$. Existiert eine Parameterwahlstrategie $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0$ und*

$$\limsup_{\delta\to 0} \left\{ \|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x^\dagger\|_X \delta^{-\frac{2}{3}} : y^\delta \in Y \text{ mit } \|y^\delta - y\|_Y \le \delta \right\} = 0, \tag{6.3}$$

so ist $x^\dagger = 0$.

Beweis. Angenommen, es wäre $x^\dagger \neq 0$. Wir zeigen zuerst, dass unter diesen Voraussetzungen $\alpha(\delta)\delta^{-2/3} \to 0$ gehen muss. Dafür verwenden wir die Charakterisierung (6.1) für x_α^δ und y^δ, indem wir schreiben

$$(K^*K + \alpha(\delta)\,\mathrm{Id})(x_\alpha^\delta - x^\dagger) = K^*y^\delta - K^*y - \alpha(\delta)x^\dagger.$$

Daraus folgt mit $\kappa = \|K^*K\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \|K^*\|^2_{\mathcal{L}(Y,X)}$

$$|\alpha(\delta)|\|x^\dagger\|_X \leq \sqrt{\kappa}\delta + (\alpha(\delta) + \kappa)\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X.$$

Multiplizieren mit $\delta^{-2/3}$ und Anwenden der Annahmen (6.3) und $x^\dagger \neq 0$ liefert nun

$$|\alpha(\delta)|\delta^{-2/3} \leq \|x^\dagger\|_X^{-1}\left(\sqrt{\kappa}\delta^{\frac{1}{3}} + (\alpha(\delta) + \kappa)\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X\delta^{-\frac{2}{3}}\right) \to 0.$$

Wir konstruieren nun einen Widerspruch. Sei $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System von K und definiere

$$\delta_n := \sigma_n^3 \quad \text{und} \quad y_n := y + \delta_n u_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

so dass gilt $\|y_n - y\|_Y = \delta_n \to 0$ für $n \to \infty$. Sei weiter $\alpha_n := \alpha(\delta_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger &= (x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x_{\alpha_n}) + (x_{\alpha_n} - x^\dagger)\\
&= R_\alpha(y_n - y) + (x_{\alpha_n} - x^\dagger)\\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{\sigma_m}{\sigma_m^2 + \alpha_n}(\delta_n u_n, u_m)_Y\, v_m + (x_{\alpha_n} - x^\dagger)\\
&= \frac{\delta_n\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha_n}v_n + (x_{\alpha_n} - x^\dagger).
\end{aligned}$$

Aus Annahme (6.3) für $y^\delta = y_n$ sowie für $y^\delta = y$ erhalten wir daraus

$$\frac{\sigma_n\delta_n^{1/3}}{\sigma_n^2 + \alpha_n} \leq \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^\dagger\|_X\delta_n^{-2/3} + \|x_{\alpha_n} - x^\dagger\|_X\delta_n^{-2/3} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Andererseits folgt aber aus $\sigma_n = \delta_n^{1/3}$ und $\alpha_n\delta_n^{-2/3} \to 0$

$$\frac{\sigma_n\delta_n^{1/3}}{\sigma_n^2 + \alpha_n} = \frac{\delta_n^{2/3}}{\delta_n^{2/3} + \alpha_n} = \frac{1}{1 + \alpha_n\delta_n^{-2/3}} \to 1 \qquad \text{für } n \to \infty$$

und damit der gesuchte Widerspruch. □

Ein Vergleich der Darstellung (6.1) mit den Normalengleichungen (3.3) legt nahe, dass die Tikhonov-Regularisierung auch eine Minimierungseigenschaft hat. Dies trifft in der Tat zu.

Satz 6.5. *Für $y \in Y$ ist $x_\alpha = R_\alpha y$ eindeutig bestimmt als Minimierer des* Tikhonov-Funktionals

$$J_\alpha(x) := \frac{1}{2}\|Kx - y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|_X^2. \tag{6.4}$$

Beweis. Ein Minimierer $\bar{x} \in X$ von J_α ist charakterisiert durch $J_\alpha(\bar{x}) \leq J_\alpha(x)$ für alle $x \in X$. Wir betrachten daher für beliebiges $x \in X$ die Differenz, sortieren die Skalarprodukte um, und erhalten

$$\begin{aligned}
J_\alpha(x) - J_\alpha(x_\alpha) &= \frac{1}{2}(Kx - y, Kx - y)_Y + \frac{\alpha}{2}(x, x)_X - \frac{1}{2}(Kx_\alpha - y, Kx_\alpha - y)_Y - \frac{\alpha}{2}(x_\alpha, x_\alpha)_X \\
&= \frac{1}{2}\|Kx - Kx_\alpha\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x - x_\alpha\|_X^2 + (K^*(Kx_\alpha - y) + \alpha x_\alpha, x - x_\alpha)_X \\
&= \frac{1}{2}\|Kx - Kx_\alpha\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x - x_\alpha\|_X^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Also ist x_α ein Minimierer von J_α.

Gilt umgekehrt $J_\alpha(x) - J_\alpha(\bar{x}) \geq 0$ für alle $x \in X$, so folgt für $x = \bar{x} + tz$ für $t > 0$ beliebig und $z \in X$ fest

$$0 \leq J_\alpha(\bar{x} + tz) - J_\alpha(\bar{x}) = \frac{t^2}{2}\|Kz\|_Y^2 + \frac{t^2\alpha}{2}\|z\|_X^2 + t\,(K^*(K\bar{x} - y) + \alpha\bar{x}, z)_X\,.$$

Division durch t und Grenzübergang $t \to 0$ ergibt also

$$(K^*(K\bar{x} - y) + \alpha\bar{x}, z)_X \geq 0 \qquad \text{für alle } z \in X.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn $K^*K\bar{x} + \alpha\bar{x} = K^*y$ gilt. Da x_α die eindeutige Lösung von (6.1) ist, folgt $\bar{x} = x_\alpha$. Also ist x_α der eindeutige Minimierer von (6.4). □

Die Charakterisierung der Tikhonov-Regularisierung als Minimierung des Funktionals (6.4) stellt einen weiteren Zusammenhang zur Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$ her: Anstelle auf einer reinen Ausgleichslösung zu bestehen, deren Norm für $y \notin \mathcal{D}(K^\dagger)$ nicht beschränkt sein muss, wird einer Näherungslösung gesucht, die gleichzeitig die *Residuumsnorm* $\|Kx - y\|_Y$ und die Norm $\|x\|_X$ minimiert. [1] Der Regularisierungsparameter α bestimmt dabei die Gewichtung: je kleiner das Fehlerniveau δ ist, desto mehr Gewicht kann man der Minimierung der Residuumsnorm geben (d. h. desto kleiner kann man α wählen). Umgekehrt verlangt ein höheres Fehlerniveau eine stärkere Gewichtung des *Strafterms* $\|x\|_X$ (und damit ein größeres α), damit die Näherung stabil bleibt.

Mit Hilfe dieser Charakterisierung lassen sich auch zum Beispiel nützliche Monotonie-Eigenschaften herleiten. Wir führen dafür die *Wertefunktionen*

$$f(\alpha) := \frac{1}{2}\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|_Y^2, \qquad g(\alpha) := \frac{1}{2}\|x_\alpha^\delta\|_X^2,$$

[1] In dieser Form wurde diese Regularisierung auch von Andreĭ Nikolaevich Tikhonov, einem bedeutenden russischen Mathematiker des 20. Jahrhunderts, eingeführt; siehe [Tikhonov 1963a; Tikhonov 1963b].

sowie

$$j(\alpha) := J_\alpha(x_\alpha^\delta) = f(\alpha) + \alpha g(\alpha)$$

ein.

Lemma 6.6. *Die Funktionen f, g sind monoton in dem Sinne, dass für alle $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ gilt*

$$(f(\alpha_1) - f(\alpha_2))(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0, \tag{6.5}$$

$$(g(\alpha_1) - g(\alpha_2))(\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0. \tag{6.6}$$

Beweis. Aus der Minimierungseigenschaft von $x_{\alpha_1}^\delta$ bezüglich J_{α_1} und $x_{\alpha_2}^\delta$ bezüglich J_{α_2} folgt

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) + \alpha_1 g(\alpha_1) &\leq f(\alpha_2) + \alpha_1 g(\alpha_2), \\ f(\alpha_2) + \alpha_2 g(\alpha_2) &\leq f(\alpha_1) + \alpha_2 g(\alpha_1). \end{aligned}$$

Addieren beider Ungleichungen und Umsortieren ergibt sofort (6.6). Dividieren der ersten Ungleichung durch α_1 sowie der zweiten durch α_2 und Addieren ergibt

$$\frac{1}{\alpha_1}(f(\alpha_1) - f(\alpha_2)) \leq \frac{1}{\alpha_2}(f(\alpha_1) - f(\alpha_2)).$$

Multiplizieren mit $\alpha_1\alpha_2$ und Umsortieren ergibt dann (6.5). □

Wie erwartet ist also für $\alpha \to 0$ das Residuum monoton fallend und die Norm von x_α^δ monoton steigend. Für die Wertefunktion j betrachten wir nun die einseitigen Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} D^+ j(\alpha) &:= \lim_{t \to 0^+} \frac{j(\alpha + t) - j(\alpha)}{t}, \\ D^- j(\alpha) &:= \lim_{t \to 0^-} \frac{j(\alpha + t) - j(\alpha)}{t}. \end{aligned}$$

Lemma 6.7. *Für alle $\alpha > 0$ gilt*

$$\begin{array}{rcccl} D^+ j(\alpha) & \leq & g(\alpha) & \leq & D^- j(\alpha), \\ j(\alpha) - \alpha D^- j(\alpha) & \leq & f(\alpha) & \leq & j(\alpha) - \alpha D^+(\alpha). \end{array}$$

Beweis. Für beliebige $\alpha, \tilde{\alpha} > 0$ folgt aus der Minimierungseigenschaft bezüglich j, dass gilt

$$j(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) + \tilde{\alpha} g(\tilde{\alpha}) \leq f(\alpha) + \tilde{\alpha} g(\alpha).$$

Also ist

$$\begin{aligned} j(\alpha) - j(\tilde{\alpha}) &= f(\alpha) + \alpha g(\alpha) - f(\tilde{\alpha}) - \tilde{\alpha} g(\tilde{\alpha}) \\ &\geq f(\alpha) + \alpha g(\alpha) - f(\alpha) - \tilde{\alpha} g(\alpha) \\ &= (\alpha - \tilde{\alpha}) g(\alpha), \end{aligned}$$

woraus für $\tilde{\alpha} := \alpha + t > \alpha$ für $t > 0$ folgt

$$\frac{j(\alpha + t) - j(\alpha)}{t} \leq g(\alpha).$$

Grenzübergang $t \to 0$ ergibt dann $D^+ j(\alpha) \leq g(\alpha)$. Die entsprechende Ungleichung für $D^- j(\alpha)$ folgt analog mit $t < 0$.

Zusammen mit der Definition von j folgen daraus die restlichen Ungleichungen; etwa durch

$$j(\alpha) = f(\alpha) + \alpha g(\alpha) \leq f(\alpha) + \alpha D^- j(\alpha)$$

und Umformen. □

Nach einem Satz von Lebesgue (dessen Beweis auf dem Überdeckungssatz von Vitali beruht, siehe [Hewitt & Stromberg 1975, Satz V.17.12]) ist eine monotone Funktion fast überall differenzierbar (d. h. es gibt höchstens abzählbar viele Punkte, in denen der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht existiert). Also ist mit f und g auch $j = f + \alpha g$ fast überall differenzierbar, und wir erhalten die folgende Charakterisierung der Ableitung.

Folgerung 6.8. *Für fast alle $\alpha > 0$ ist j differenzierbar, und es gilt*

$$j'(\alpha) = g(\alpha).$$

Diese Darstellung kann zum Beispiel bei der numerischen Umsetzung von heuristischen Parameterwahlregeln hilfreich sein.

Darüberhinaus liefert Satz 6.5 eine neue Interpretation der einfachsten Quellbedingung $x^\dagger \in X_1 = \mathcal{R}(K^*)$. Der Minimierer von (6.4) ändert sich nicht, wenn wir das Funktional durch $\alpha > 0$ dividieren; also ist x_α^δ auch gegeben als die Lösung von

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2\alpha} \|Kx - y^\delta\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|x\|_X^2. \tag{6.7}$$

Für $\delta \to 0$ und $\alpha \to 0$ soll nun $x_\alpha^\delta \to x^\dagger$ konvergieren. Machen wir (formal) den Grenzübergang in (6.7), d. h. ersetzen wir zuerst y^δ durch $y \in \mathcal{R}(K)$ und lassen $\alpha \to 0$ gehen, so kann das Funktional nur dann einen endliches Minimum in $\bar{x}$ annehmen, falls $K\bar{x} = y$ gilt. Im Grenzfall $\alpha = 0$ erhalten wir also das Funktional

$$\min_{x \in X,\, Kx = y} \frac{1}{2} \|x\|_X^2. \tag{6.8}$$

Wir gehen weiter formal vor: Mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators $p \in Y$ kann (6.8) als unbeschränktes Sattelpunktproblem

$$\min_{x \in X} \max_{p \in Y} \frac{1}{2} \|x\|_X^2 - (p, Kx - y)_Y$$

geschrieben werden. Damit $(\bar{x}, \bar{p}) \in X \times Y$ ein Sattelpunkt sein kann, müssen dort die Ableitungen nach x und p verschwinden: wir erhalten die beiden Bedingungen.

$$\begin{cases} \bar{x} = K^*\bar{p}, \\ K\bar{x} = y. \end{cases}$$

Für $y \in \mathcal{R}(K)$ beschreibt die Lösung von (6.8) aber genau die Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$, d. h. $\bar{x} = x^\dagger$. Die Existenz eines Lagrange-Multiplikators $\bar{p}$ mit $x^\dagger = K^*\bar{p}$ entspricht daher genau der Quellbedingung $x^\dagger \in \mathcal{R}(K^*)$. (Da K^* nicht surjektiv sein muss, ist dies eine nichttriviale Forderung.) Anschaulich ist dies nachvollziehbar: Wenn wir $x^\dagger$ über eine Folge von Minimierern x_α^δ annähern möchten, so sollte $x^\dagger$ selbst ein Minimierer (eines geeigneten Grenzproblems) sein.

Diese Interpretation der Tikhonov-Regularisierung als Minimierung eines Funktionals lässt sich – im Gegensatz zur Spektraldarstellung – auf nichtlineare Operatorgleichung erweitern. Sie ist auch in allgemeinen Banachräumen anwendbar und lässt sich sogar durch Verwendung anderer Diskrepanz- und Strafterme als Normen weiter verallgemeinern. (Dies gilt auch für die entsprechende Interpretation der Quellbedingung.) Dann sind natürlich andere Beweismethoden und insbesondere andere Quellbedingungen notwendig. Wir werden darauf in einem späteren Kapitel eingehen.

7 LANDWEBER-REGULARISIERUNG

Ausgangspunkt für die Landweber-Regularisierung ist die Charakterisierung der Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$ nach Satz 3.6 als Lösung $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$ der Normalengleichung (3.3). Diese können äquivalent geschrieben werden für beliebiges $\omega > 0$ als Fixpunktgleichung

$$x = x - \omega(K^*Kx - K^*y) = x + \omega K^*(y - Kx).$$

Die zugehörige Fixpunktiteration – auch als *Richardson-Iteration*[1] bekannt – lautet

$$x_n = x_{n-1} + \omega K^*(y - Kx_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{7.1}$$

für ein $x_0 \in X$. Wir werden hier nur $x_0 = 0$ betrachten. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, dass diese Iteration gegen eine Lösung der Normalengleichung konvergiert, falls $y \in \mathcal{R}(K)$ und $\|\operatorname{Id} - \omega K^*K\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$ ist. Wegen $x_0 = 0 \in \mathcal{R}(K^*)$ ist auch $x_n \in \mathcal{R}(K^*) \subset \mathcal{N}(K)^\perp$, und damit konvergiert x_n gegen $x^\dagger$. Für $y^\delta \notin \mathcal{R}(K)$ kann man hingegen keine Konvergenz erwarten. Die Idee ist nun, die Iteration rechtzeitig abzubrechen, d. h. x_m für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ als regularisierte Näherung zu akzeptieren. Hier spielt also der *Abbruchindex* $m \in \mathbb{N}$ die Rolle des Regularisierungsparameters, was mit $\alpha = \frac{1}{m} > 0$ zu der Schreibweise der letzten Kapitel passt.[2]

Die Iteration (7.1) kann in die Form einer spektralen Regularisierung gebracht werden. Dafür leiten wir zuerst eine rekursionsfreie Darstellung von x_n her.

Lemma 7.1. *Für $m \in \mathbb{N}$ ist*

$$x_m = \omega \sum_{n=0}^{m-1} (\operatorname{Id} - \omega K^*K)^n K^*y.$$

[1] Diese Methode zur Lösung von linearen Gleichungssystemen geht auf Lewis Fry Richardson zurück. Er propagierte auch 1922 die heutige Methode der Wettervorhersage auf Basis von numerischer Simulation. (Ein eigener erster Versuch von 1910 – durchgeführt von Hand! – war grundsätzlich korrekt, lieferte aber wegen gestörter Eingabedaten ein falsches Ergebnis. Wettervorhersage ist ein schlecht gestelltes Problem!)

[2] Zur Lösung von schlecht gestellten Operatorgleichungen wurde diese Methode zuerst von Lawrence Landweber betrachtet. In [Landweber 1951] zeigt er die Konvergenz für $y \in \mathcal{R}(K)$; andernfalls, schreibt er dort, könnten die Iterierten „als nützliche Näherungslösung dienen".

Beweis. Dies folgt mit vollständiger Induktion: Für $m = 1$ ist

$$x_1 = \omega K^* y = \omega(\mathrm{Id} - \omega K^* K)^0 K^* y.$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig und gelte die behauptete Darstellung für x_m. Dann ist

$$\begin{aligned}
x_{m+1} &= x_m + \omega K^*(y - Kx_m) \\
&= (\mathrm{Id} - \omega K^* K)x_m + \omega K^* y \\
&= (\mathrm{Id} - \omega K^* K)\left(\omega \sum_{n=0}^{m-1} (\mathrm{Id} - \omega K^* K)^n K^* y\right) + \omega K^* y \\
&= \omega \sum_{n=0}^{m-1} (\mathrm{Id} - \omega K^* K)^{n+1} K^* y + \omega(\mathrm{Id} - \omega K^* K)^0 K^* y \\
&= \omega \sum_{n=0}^{m} (\mathrm{Id} - \omega K^* K)^n K^* y.
\end{aligned}$$ □

Die nach Iteration m abgebrochene *Landweber-Iteration* (7.1) wird also erzeugt durch einen linearen Operator, d. h.

$$x_m = \varphi_m(K^* K)K^* y$$

mit

$$\varphi_m(\lambda) = \omega \sum_{n=0}^{m-1} (1 - \omega\lambda)^n = \omega \frac{1 - (1 - \omega\lambda)^m}{1 - (1 - \omega\lambda)} = \frac{1 - (1 - \omega\lambda)^m}{\lambda}.$$

Bis auf die Schreibweise φ_m anstelle von φ_α für $\alpha = \frac{1}{m}$ (d. h. statt $\alpha \to 0$ betrachten wir $m \to \infty$) hat das genau die Form aus Beispiel 5.2 (iii).

Satz 7.2. *Für $\omega \in (0, \kappa^{-1})$ wird durch $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Regularisierung $\{R_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $R_m := \varphi_m(K^* K)K^*$ definiert.*

Beweis. Wir müssen lediglich zeigen, dass $\varphi_m(\lambda) \to \frac{1}{\lambda}$ für $m \to \infty$ konvergiert und $\lambda\varphi_m(\lambda)$ gleichmäßig beschränkt ist für alle $\alpha > 0$. Wegen der Bedingung an ω gilt $0 < 1 - \omega\lambda < 1$ für alle $\lambda \in (0, \kappa]$, woraus sowohl $(1 - \omega\lambda)^m \to 0$ für $m \to \infty$ als auch

$$\lambda|\varphi_m(\lambda)| = |1 - (1 - \omega\lambda)^m| \leq 1 \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ und } \lambda \in (0, \kappa],$$

d. h. $C_\varphi = 1$, folgt. Also ist $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ein regularisierender Filter, und Satz 5.5 liefert die Behauptung. □

Die Landweber-Iteration konvergiert also genau dann für $m \to \infty$ gegen die Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$, wenn $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$ liegt; ansonsten divergiert sie. Es liegt nun nahe, den Abbruchindex nach dem Diskrepanzprinzip zu wählen: Zu $\tau > 1$ bestimme $m(\delta, y^\delta)$ so, dass für $x_m^\delta := R_m y^\delta$ gilt

$$\|Kx^\delta_{m(\delta,y^\delta)} - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|Kx_m^\delta - y^\delta\|_Y \qquad \text{für alle } m < m(\delta, y^\delta). \tag{7.2}$$

(Dies ist kein zusätzlicher Rechenaufwand, denn das Residuum $y^\delta - Kx_m^\delta$ wird als Teil der Iterationsvorschrift (7.1) berechnet.) Die Existenz solch eines $m(\delta, y^\delta)$ garantiert dabei Satz 4.7. Im Folgenden sei stets $\omega \in (0, \kappa^{-1})$ angenommen.

Satz 7.3. *Für alle $\nu > 0$ und $\tau > 1$ ist die Landweber-Regularisierung zusammen mit der Parameterwahlstrategie (7.2) ein ordnungsoptimales Regularisierungsverfahren.*

Beweis. Wir weisen die notwendigen Eigenschaften für φ_m nach, wobei wir $\alpha = \frac{1}{m}$ setzen. Zuerst gilt wegen $\omega\lambda < 1$ mit der Bernoullischen Ungleichung

$$|\varphi_m(\lambda)| = \frac{|1 - (1-\omega\lambda)^m|}{\lambda} \leq \frac{|1 - 1 + m\omega\lambda|}{\lambda} = \omega m = \omega\alpha^{-1} \qquad \text{für alle } \lambda \in (0, \kappa]$$

und damit die Bedingung (5.4) (falls $\omega \leq 1$; ansonsten zeigt die Betrachtung des Beweises von Satz 5.10, dass dadurch nur die Konstante C_2 vergrössert wird).

Weiter folgt aus der Bernoullischen Ungleichung auch $(1 + x) \leq e^x$ und damit

$$r_m(\lambda) = |1 - \lambda\varphi_m(\lambda)| = (1 - \omega\lambda)^m \leq e^{-\omega\lambda m} \leq 1 =: C_r \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}, \lambda \in (0, \kappa].$$

Wir betrachten nun für $\nu > 0$ und m fest die Funktion $h_m(\lambda) := \lambda^{\nu/2} e^{-\omega\lambda m}$ und berechnen

$$h_m'(\lambda) = \frac{\nu}{2}\lambda^{\nu/2-1}e^{-\omega\lambda m} - \omega m\lambda^{\nu/2}e^{-\omega\lambda m} = \lambda^{\nu/2-1}e^{-\omega\lambda m}\omega m\left(\frac{\nu}{2\omega m} - \lambda\right).$$

In der Nullstelle $\lambda^* = \frac{\nu}{2\omega m}$ ist $h_m''(\lambda^*) < 0$, daher ist

$$\sup_{\lambda\in(0,\kappa]} \lambda^{\nu/2} r_m(\lambda) \leq \sup_{\lambda\in(0,\infty)} h_m(\lambda) = h_m\left(\frac{\nu}{2\omega m}\right) = e^{-\nu/2}\left(\frac{\nu}{2\omega}\right)^{\nu/2} m^{-\nu/2} =: C_\nu \alpha^{\nu/2}.$$

Damit gilt (5.5) für alle $\nu > 0$. Die Landweber-Iteration hat also unendliche Qualifikation, und die Aussage folgt für $\tau > C_r = 1$ aus Satz 5.10. □

Wir untersuchen nun die Monotonie-Eigenschaften der Landweber-Iteration.

Satz 7.4. *Für $y^\delta \neq 0$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\|Kx_{m+1}^\delta - y^\delta\|_Y < \|Kx_m^\delta - y^\delta\|_Y.$$

Beweis. Aus der Iterationsvorschrift (7.1) folgt

$$\begin{aligned} Kx_{m+1}^\delta - y^\delta &= K\left((\mathrm{Id} - \omega K^*K)x_m^\delta + \omega K^* y^\delta\right) - y^\delta \\ &= (\mathrm{Id} - \omega KK^*)Kx_m^\delta - (\mathrm{Id} + \omega KK^*)y^\delta \\ &= (\mathrm{Id} - \omega KK^*)(Kx_m^\delta - y^\delta) \end{aligned}$$

und damit wegen $\omega < \kappa^{-1} = \sigma_1^{-2} \leq \sigma_n^{-2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|Kx_{m+1}^\delta - y^\delta\|_Y^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (1-\omega\sigma_n^2)^2 | \left(Kx_m^\delta - y^\delta, u_n\right)_Y |^2 \\ &< \sum_{n\in\mathbb{N}} | \left(Kx_m^\delta - y^\delta, u_n\right)_Y |^2 \leq \|Kx_m^\delta - y^\delta\|_Y^2. \end{aligned}$$ □

Das Residuum ist also stets monoton fallend. Dies gilt aber nur bedingt für den Fehler.

Satz 7.5. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$\|Kx_m^\delta - y^\delta\|_Y > 2\delta,$$

so ist

$$\|x_{m+1}^\delta - x^\dagger\|_X < \|x_m^\delta - x^\dagger\|_X.$$

Beweis. Wir verwenden die Iterationsvorschrift und schreiben mit $\xi_m^\delta = y^\delta - Kx_m^\delta$ und $y = Kx^\dagger$

$$\begin{aligned}\|x_{m+1}^\delta - x^\dagger\|_X^2 &= \|x_m^\delta - x^\dagger + \omega K^*(y^\delta - Kx_m^\delta)\|_X^2 \\ &= \|x_m^\delta - x^\dagger\|_X^2 - 2\omega\left(Kx^\dagger - Kx_m^\delta, \xi_m^\delta\right)_Y + \omega^2\|K^*\xi_m^\delta\|_X^2 \\ &= \|x_m^\delta - x^\dagger\|_X^2 + \omega\left(\xi_m^\delta - 2y + 2Kx_m^\delta, \xi_m^\delta\right)_Y + \omega\left(\omega\|K^*\xi_m^\delta\|_X^2 - \|\xi_m^\delta\|_Y^2\right).\end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass die letzten beiden Terme negativ sind. Für den ersten Term verwenden wir die Definition von ξ_m^δ, und erhalten durch Einsetzen von $\xi_m^\delta = 2\xi_m^\delta - \xi_m^\delta = 2y^\delta - 2Kx_m^\delta - \xi_m^\delta$ dass gilt

$$\begin{aligned}\left(\xi_m^\delta - 2y + 2Kx_m^\delta, \xi_m^\delta\right)_Y &= 2\left(y^\delta - y, \xi_m^\delta\right)_Y - \|\xi_m^\delta\|_Y^2 \\ &\leq 2\delta\|\xi_m^\delta\|_Y - \|\xi_m^\delta\|_Y^2 \\ &= \left(2\delta - \|Kx_m^\delta - y^\delta\|_Y\right)\|\xi_m^\delta\|_Y < 0,\end{aligned}$$

da die Klammer nach Annahme negativ und $\|\xi_m^\delta\|_Y > 0$ ist. Für den zweiten Term in Klammern verwenden wir, dass wegen $\omega < \kappa^{-1}$ gilt

$$\omega\|K^*\xi_m^\delta\|_X^2 \leq \omega\|K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2\|\xi_m^\delta\|_Y^2 = \omega\kappa\|\xi_m^\delta\|^2 < \|\xi_m^\delta\|_X^2$$

und damit

$$\omega\left(\omega\|K^*\xi_m^\delta\|_X^2 - \|\xi_m^\delta\|_Y^2\right) < 0. \tag{7.3}$$

Zusammen erhalten wir die gewünschte Ungleichung. □

Die Landweber-Iteration reduziert also zunächst den Fehler, bis das Residuum unter das doppelte Fehlerniveau fällt. (Für das Diskrepanzprinzip sollte daher stets $\tau \leq 2$ gewählt werden, um nicht garantiert zu früh abzubrechen.) Danach wird für $y^\delta \notin \mathcal{R}(K)$ aufgrund von Satz 5.5 der Fehler aber wieder anwachsen. Dieses Verhalten wird *Semikonvergenz* genannt und ist typisch für iterative Verfahren, wenn sie auf schlecht gestellte Probleme angewendet werden. Das Diskrepanzprinzip verhindert dann, dass der Fehler wieder beliebig anwächst. (Ein leichtes Anwachsen wird dabei in Kauf genommen – wie stark, hängt von der Wahl von $\tau \in (1,2)$ ab.) Der folgende Satz gibt eine obere Schranke für die Anzahl der dafür notwendigen Schritte an und liefert dadurch eine a priori Parameterwahlstrategie.

Satz 7.6. *Für $\tau > 1$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$ bricht das Diskrepanzprinzip die Landweber-Iteration nach $m(\delta, y^\delta)$ Schritten ab, wobei*

$$m(\delta, y^\delta) \leq C\delta^{-2} \qquad \text{für ein } C > 0.$$

Beweis. Wir leiten zuerst eine Konvergenzrate für das Residuum in Abhängigkeit von m her. Dazu betrachten wir für $n \geq 0$ die Iterierten x_n, die die Landweber-Iteration mit den exakten Daten $y \in \mathcal{R}(K)$ erzeugt, und bezeichen mit ξ_n das entsprechende Residuum $\xi_n = y - Kx_n$. Wir schätzen nun ähnlich wie im Beweis von Satz 7.5 ab. Aus der Iterationsvorschrift folgt durch einfaches Umformen und mit (7.3)

$$\begin{aligned}
\|x^\dagger - x_n\|_X^2 - \|x^\dagger - x_{n+1}\|_X^2 &= \|x^\dagger - x_n\|_X^2 - \|x^\dagger - x_n - \omega K^*\xi_n\|_X^2 \\
&= 2\omega \left(Kx^\dagger - Kx_n, \xi_n\right)_X - \omega^2\|K^*\xi_n\|_X^2 \\
&= \omega\left(\|\xi_n\|_Y^2 - \omega\|K^*\xi_n\|_X^2\right) + \omega\|\xi_n\|_Y^2 \\
&> \omega\|\xi_n\|_Y^2.
\end{aligned}$$

Summieren über $n = 1, \dots, m$ ergibt zusammen mit der Monotonie des Residuums aus Satz 7.4, dass

$$\begin{aligned}
\|x^\dagger - x_1\|_X^2 - \|x^\dagger - x_{m+1}\|_X^2 &= \sum_{n=1}^m \left(\|x^\dagger - x_n\|_X^2 - \|x^\dagger - x_{n+1}\|_X^2\right) \\
&> \omega \sum_{n=1}^m \|\xi_n\|_Y^2 > \omega m \|\xi_m\|_X^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist daher

$$\|y - Kx_m\|_Y^2 < (\omega m)^{-1}\|x^\dagger - x_1\|_X^2.$$

Wie im Beweis von Satz 7.4 gilt nun wegen $x_0 = 0$

$$\xi_m^\delta = y^\delta - Kx_m^\delta = (\mathrm{Id} - \omega KK^*)(y^\delta - Kx_{m-1}^\delta) = \dots = (\mathrm{Id} - \omega KK^*)^m y^\delta$$

und analog $\xi_m = (\mathrm{Id} - \omega KK^*)^m y$. Daraus folgt

$$\|(\mathrm{Id} - \omega KK^*)^m (y^\delta - y)\|_Y^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (1 - \omega\sigma_n^2)^{2m} \left|\left(y^\delta - y, u_n\right)_Y\right|^2 \leq \|y^\delta - y\|_Y^2$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\|Kx_m^\delta - y^\delta\|_Y &= \|(\mathrm{Id} - \omega KK^*)^m y^\delta\|_Y \\
&\leq \|(\mathrm{Id} - \omega KK^*)^m y\|_Y + \|(\mathrm{Id} - \omega KK^*)^m (y^\delta - y)\|_Y \\
&\leq \|y - Kx_m\|_Y + \|y^\delta - y\|_Y \\
&\leq (\omega m)^{-1/2} \|x^\dagger - x_1\|_X + \delta.
\end{aligned}
$$

Das Diskrepanzprinzip bestimmt nun den Abbruchindex $m(\delta, y^\delta)$ so, dass zum ersten Mal $\|Kx^\delta_{m(\delta,y^\delta)} - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta$ ist. Dies ist also spätestens der Fall, wenn gilt

$$
(\omega m(\delta, y^\delta))^{-1/2} \|x^\dagger - x_1\|_X + \delta \leq \tau\delta
$$

beziehungsweise

$$
m(\delta, y^\delta) \geq \omega \frac{\|x^\dagger - x_1\|_X^2}{\omega^2(\tau - 1)^2} \delta^{-2}.
$$

Daraus folgt die Behauptung mit $C := \omega^{-1}(\tau - 1)^{-2}\|x^\dagger - x_1\|_X^2 + 1$. □

Es überrascht nicht, dass man diese Abschätzung unter der üblichen Quellbedingung $x^\dagger \in X_\nu$ noch verbessern kann: Aus (5.10) folgt mit $\alpha = \frac{1}{m}$ die Abschätzung $m \leq C\delta^{-\frac{2}{\nu+1}}$. Trotzdem erfordert die Landweber-Regularisierung in der Praxis oft zu viele Iterationen, bis das Abbruchkriterium erreicht ist, und man greift zu beschleunigten Varianten wie etwa in [Engl, Hanke u. a. 1996, Kapitel 6.2, 6.3] beschrieben. Außerdem lässt sich der Ansatz, ein iteratives Verfahren zur Lösung der Normalengleichung durch vorzeitigen Abbruch in ein Regularisierungsverfahren zu verwandeln, auch auf andere Verfahren als die Richardson-Iteration anwenden; eine beliebte Wahl ist dabei das Verfahren der konjugierten Gradienten; siehe [Engl, Hanke u. a. 1996, Kapitel 7].

8 DISKRETISIERUNG ALS REGULARISIERUNG

Und nun zu etwas völlig anderem. Wie wir gesehen haben, liegt die fundamentale Schwierigkeit bei inversen Problemen in der Unstetigkeit der Pseudoinversen für kompakte Operatoren $K : X \to Y$ mit unendlichdimensionalem Bild. Es ist daher naheliegend zu versuchen, eine Folge von Operatoren K_n mit *endlichdimensionalem* Bild zu konstruieren und die gesuchte Minimum-Norm-Lösung $K^\dagger y$ mit Hilfe der (nun stetigen) Pseudoinversen $(K_n)^\dagger$ anzunähern. Dies funktioniert – bis zu einem gewissen Grad – tatsächlich. Um ein endlichdimensionales Bild zu erhalten, haben wir im wesentlichen zwei Möglichkeiten:

(i) Wir schränken das Urbild von K auf einen endlichdimensionalen Unterraum $X_n \subset X$ ein und definieren $K_n : X_n \to Y$. (Ist nämlich $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von X_n, so ist auch $\mathcal{R}(K_n) = \operatorname{span}\{Kx_1, \dots, Kx_n\}$ endlichdimensional.) Man bezeichnet diesen Ansatz als *Ausgleichsprojektion* (englisch: „least-squares projection“).

(ii) Wir schränken direkt das Bild von K auf einen endlichdimensionalen Unterraum $Y_n \subset Y$ ein und definieren $K_n : X \to Y_n$. Dies bezeichnet man als *duale Ausgleichsprojektion* (englisch: „dual least-squares projection“).

Natürlich kann man auch Bild *und* Urbild einschränken und $K_n : X_n \to Y_n$ definieren; dies bietet aber aus Sicht der Regularisierung keinen Vorteil. Wir betrachten nun beide Ansätze, wobei sich der zweite als vorteilhafter herausstellen wird. Da wir dabei keine Spektraltheorie benötigen, betrachten wir hier einen beschränkten Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

AUSGLEICHSPROJEKTION

Sei eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von geschachtelten Unterräumen

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X$$

mit $\dim X_n = n$ und $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} = X$ gegeben. Sei weiterhin $P_n := P_{X_n}$ die orthogonale Projektion auf X_n und $T_n := TP_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Da T_n endlichdimensionales Bild hat, ist $T_n^\dagger := (T_n)^\dagger$ stetig. Wir wählen also für $y \in Y$ die Regularisierung $x_n := T_n^\dagger y$, d. h. die Minimum-Norm-Lösung von $TP_n x = y$. Nach Lemma 3.4 ist

$$x_n \in \mathcal{R}(T_n^\dagger) = \mathcal{N}(T_n)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T_n^*)} = \overline{\mathcal{R}(P_n T^*)} \subset X_n,$$

da X_n endlichdimensional und damit abgeschlossen und P_n selbstadjungiert ist. (Wir suchen also nach der Minimum-Norm-Lösung nur in X_n statt in ganz X.) Um zu zeigen, dass $T_n^\dagger$ eine Regularisierung im Sinne von Definition 4.1 darstellt, müssen wir nun zeigen, dass für $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ gilt $x_n \to x^\dagger$. Dies können wir über die Norm von x_n charakterisieren.[1]

Lemma 8.1. *Es konvergiert $x_n \to x^\dagger$ genau dann, wenn $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_X \leq \|x^\dagger\|_X$ gilt.*

Beweis. Aus $x_n \to x^\dagger$ folgt sofort mit der Dreiecksungleichung

$$\|x_n\|_X \leq \|x_n - x^\dagger\|_X + \|x^\dagger\|_X \to \|x^\dagger\|_X.$$

Ist umgekehrt die $\limsup$-Bedingung erfüllt, so ist die Folge $\{\|x_n\|_X\}_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X beschränkt. Es existiert also eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $\bar{x} \in X$ mit $x_k := x_{n_k} \rightharpoonup \bar{x}$ und $Tx_k \rightharpoonup T\bar{x}$. Nach Definition von x_k als Ausgleichslösung von $T_k x = y$ (mit minimaler Norm) gilt nun

$$\|T_k x_k - y\|_Y \leq \|T_k x - y\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Wegen $x_k \in X_k$, d. h. $x_k = P_k x_k$, und $y = Tx^\dagger$ folgt daraus für $x = P_k x^\dagger$

$$\begin{aligned}\|Tx_k - y\|_Y = \|T_k x_k - Tx^\dagger\|_Y &\leq \|T_k P_k x^\dagger - Tx^\dagger\|_Y = \|TP_k x^\dagger - Tx^\dagger\|_Y \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|(I - P_k)x^\dagger\|_X.\end{aligned} \tag{8.1}$$

Nach Annahme an $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert der letzte Term gegen Null für $k \to \infty$, und daher gilt $Tx_k \to Tx^\dagger$. Also muss $\bar{x} - x^\dagger \in \mathcal{N}(T)$ sein. Nun ist stets $x^\dagger \in \mathcal{N}(T)^\perp$, und daher folgt aus der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm zusammen mit der $\limsup$-Bedingung

$$\|\bar{x} - x^\dagger\|_X^2 + \|x^\dagger\|_X^2 = \|\bar{x}\|_X^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X^2 \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_k\|_X^2 \leq \|x^\dagger\|_X^2$$

und damit $\bar{x} = x^\dagger$. Jede Teilfolge konvergiert daher schwach gegen den selben Grenzwert $x^\dagger$. Also muss die gesamte Folge (schwach) gegen $x^\dagger$ konvergieren.

Schließlich ergibt die Unterhalbstetigkeit zusammen mit der $\limsup$-Bedingung, dass auch $\|x_n\|_X \to \|x^\dagger\|_X$ konvergiert, woraus zusammen mit der schwachen Konvergenz die starke Konvergenz folgt. □

Leider lassen sich Beispiele konstruieren, in denen $\{\|x_n\|_X\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist; siehe zum Beispiel [Engl, Hanke u. a. 1996, Example 3.19]. Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz gibt der folgende Satz.

[1] Wir folgen hier [Kindermann 2016]; der entsprechende Beweis in [Engl, Hanke u. a. 1996] über eine analoge Aussage für die schwache Konvergenz ist fehlerhaft und benötigt eine zusätzliche Annahme, wie in [Du 2008] bemerkt wurde.

Satz 8.2. *Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ und*

$$\limsup_{n\to\infty} \|(T_n^*)^\dagger x_n\|_Y = \limsup_{n\to\infty} \|(T_n^\dagger)^* x_n\|_Y < \infty. \tag{8.2}$$

Dann konvergiert $x_n \to x^\dagger$.

Beweis. Wegen

$$\|x_n\|_X^2 = \left(x_n - x^\dagger, x_n\right)_X + \left(x^\dagger, x_n\right)_X \leq \left(x_n - x^\dagger, x_n\right)_X + \|x^\dagger\|_X \|x_n\|_X$$

genügt es zu zeigen, dass der erste Term auf der rechten Seite gegen Null konvergiert. Dafür setzen wir $w_n := (T_n^\dagger)^* x_n$ und verwenden, dass wegen $x_n \in \mathcal{R}(T_n^\dagger) = \mathcal{R}(T_n^*)$ (denn $\mathcal{R}(T_n^*) \subset X_n$ ist endlichdimensional) gilt $T_n^* w_n = x_n$. Wir können daher wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left(x_n - x^\dagger, x_n\right)_X &= \left(x_n - x^\dagger, T_n^* w_n\right)_X = \left(T_n x_n - T_n x^\dagger, w_n\right)_Y \\
&= \left(T_n x_n - T x^\dagger, w_n\right)_Y + \left(T x^\dagger - T_n x^\dagger, w_n\right)_Y \\
&\leq \left(\|T_n x_n - T x^\dagger\|_Y + \|T(\operatorname{Id} - P_n) x^\dagger\|_Y\right) \|w_n\|_Y \\
&\leq 2\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|(\operatorname{Id} - P_n) x^\dagger\|_X \|w_n\|_Y,
\end{aligned} \tag{8.3}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder (8.1) verwendet haben. Nach Annahme (8.2) ist nun der letzte Term beschränkt, während der vorletzte Term und damit die gesamte rechte Seite gegen Null geht. Zusammen mit Lemma 8.1 ergibt dies die Aussage. □

Damit die Ausgleichsprojektion einen Regularisierungsoperator definiert, müssen also die Unterräume X_n passend zu T gewählt werden. Bevor wir uns der dualen Ausgleichsprojektion zuwenden (die ohne eine solche Annahmen auskommt), betrachten wir noch den Spezialfall kompakter Operatoren.

Satz 8.3. *Erfüllt $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ die Bedingung (8.2), so ist $x^\dagger \in \mathcal{R}(K^*)$.*

Beweis. Sei wieder $w_n := (K_n^\dagger)^* x_n$. Aus (8.2) folgt, dass $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und daher eine schwach konvergente Teilfolge $w_k \rightharpoonup \bar{w} \in Y$ besitzt. Da K und damit auch K^* kompakt ist, folgt $K^* w_k \to K^* \bar{w}$. Nun ist aber wegen $(K_n^\dagger)^* = (K_n^*)^\dagger = (P_n K^*)^\dagger$

$$K^* w_k = P_k K^* w_k + (\operatorname{Id} - P_k) K^* w_k = x_k + (\operatorname{Id} - P_k) K^* w_k.$$

Grenzübergang auf beiden Seiten ergibt wegen Satz 8.2, der Beschränktheit von w_k, und $\|\operatorname{Id} - P_k\|_{\mathcal{L}(X,X)} \to 0$ nun $K^* \bar{w} = x^\dagger$, d. h. $x^\dagger \in \mathcal{R}(K^*)$. □

Die Bedingung (8.2) impliziert also bereits eine Quellbedingung. Es ist daher nicht verwunderlich, dass wir eine Abschätzung für die Konvergenz $x_n \to x^\dagger$ zeigen können.

Satz 8.4. *Erfüllt* $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ *die Bedingung* (8.2) *und ist* $y \in \mathcal{D}(K^\dagger)$, *so existiert eine Konstante* $C > 0$ *mit*

$$\|x_n - x^\dagger\|_X \leq C\|(\mathrm{Id} - P_n)K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wegen Satz 8.3 existiert ein $w \in Y$ mit $x^\dagger = K^*w$. Also gilt wegen (8.1)

$$\left(x_n - x^\dagger, x^\dagger\right)_X \leq \|Kx_n - Kx^\dagger\|_Y\|w\|_Y \leq \|K(P_n - \mathrm{Id})x^\dagger\|_Y\|w\|_Y.$$

Zusammen mit (8.3) und der Beschränktheit der $w_n := (K_n^\dagger)^* x_n$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
\|x_n - x^\dagger\|_X^2 &= \left(x_n - x^\dagger, x_n\right)_X - \left(x_n - x^\dagger, x^\dagger\right)_X \\
&\leq 2\|K(\mathrm{Id} - P_n)x^\dagger\|_Y\|w_n\|_Y + \|K(\mathrm{Id} - P_n)x^\dagger\|_Y\|w\|_Y \\
&\leq C\|K(\mathrm{Id} - P_n)x^\dagger\|_Y = C\|K(\mathrm{Id} - P_n)(\mathrm{Id} - P_n)K^*w\|_Y \\
&= C\|(\mathrm{Id} - P_n)K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2\|w\|_Y,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass Projektionen selbstadjungiert sind und daher der Operator in der Norm die Form $\tilde{K}^*\tilde{K}$ für $\tilde{K} := (\mathrm{Id} - P_n)K^*$ hat. □

DUALE AUSGLEICHSPROJEKTION

Hier wird das Bild von T direkt diskretisiert. Wir betrachten also eine Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von geschachtelten Unterräumen

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset \overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T^*)^\perp \subset Y$$

mit $\dim Y_n = n$ und $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n} = \mathcal{N}(T^*)^\perp$. Sei nun $Q_n := P_{Y_n}$ die orthogonale Projektion auf Y_n und $T_n := Q_nT \in \mathcal{L}(X,Y)$. Wieder ist $T_n^\dagger$ und damit auch $T_n^\dagger Q_n$ stetig, und wir können $x_n := T_n^\dagger Q_n y$, d. h. die Minimum-Norm-Lösung von $Q_nTx = Q_ny$, als Kandidaten für eine Regularisierung nehmen. Um zu zeigen, dass dadurch ein Regularisierungsoperator definiert wird, können wir folgende nützliche Charakterisierung verwenden.

Lemma 8.5. *Sei* $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. *Dann ist* $x_n = P_nx^\dagger$, *wobei* $P_n := P_{X_n}$ *die orthogonale Projektion auf* $X_n := T^*Y_n$ *bezeichnet.*

Beweis. Zuerst halten wir fest, dass wegen der Endlichdimensionalität von T_n gilt

$$\mathcal{R}(T_n^\dagger) = \mathcal{N}(T_n)^\perp = \mathcal{R}(T_n^*) = \mathcal{R}(T^*Q_n) = T^*Y_n = X_n$$

und damit $x_n \in X_n$ sowie $X_n^\perp = \mathcal{N}(T_n)$. Daraus folgt auch

$$T_n(\mathrm{Id} - P_n)x = 0 \qquad \text{für alle } x \in X,$$

d. h. $T_nP_n = T_n$. Weiterhin gilt wegen $Y_n \subset \mathcal{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$ (d. h. $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{N}(Q_n)$) und Lemma 3.4 (iv)

$$Q_n y = Q_n P_{\overline{\mathcal{R}(T)}} y = Q_n T T^\dagger y = Q_n T x^\dagger = T_n x^\dagger.$$

Zusammen erhalten wir für beliebige $x \in X$, dass gilt

$$\|T_n x - Q_n y\|_Y = \|T_n x - T_n x^\dagger\|_Y = \|T_n x - T_n P_n x^\dagger\|_Y = \|T_n P_n (x - P_n x^\dagger)\|_Y.$$

Nun ist x_n definiert als die Minimum-Norm-Lösung von $T_n x = Q_n y$, d. h. als dasjenige $x \in \mathcal{N}(T_n)^\perp = X_n$, für das $\|T_n x - Q_n y\|_Y$ minimal wird – was für $x = P_n x^\dagger \in X_n$ der Fall ist. Da die Minimum-Norm-Lösung eindeutig ist, folgt $x_n = P_n x^\dagger$. □

Satz 8.6. *Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Dann konvergiert $x_n \to x^\dagger$.*

Beweis. Aus den Eigenschaften von Y_n folgt $X_n \subset X_{n+1}$ und

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^* Y_n} = \overline{T^* \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n} = \overline{T^* \mathcal{N}(T^*)^\perp} = \overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp.$$

Wegen $x^\dagger \in \mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ konvergiert also $x_n \to x^\dagger$. □

Mit Hilfe einer Quellbedingung können wir wieder eine Fehlerabschätzung wie in Satz 8.4 zeigen.

Satz 8.7. *Für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ mit $x^\dagger \in \mathcal{R}(T^*)$ existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\|x_n - x^\dagger\|_X \le C \|(\operatorname{Id} - P_n) T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Aus der Quellbedingung $x^\dagger = T^* w$ für ein $w \in Y$ und Lemma 8.5 folgt sofort

$$\|x_n - x^\dagger\|_X = \|P_n x^\dagger - x^\dagger\|_X = \|(\operatorname{Id} - P_n) T^* w\|_X \le \|(\operatorname{Id} - P_n) T^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|w\|_Y.$$ □

Auch die duale Ausgleichsprojektion definiert also einen Regularisierungsoperator. Nach Satz 4.5 existiert daher eine a priori-Parameterwahl, mit der die duale Ausgleichsprojektion ein konvergentes Regularisierungsverfahren bildet. Um diese Wahl zu charakterisieren, müssen wir die Norm von $T_n^\dagger$ abschätzen. Dafür können wir verwenden, dass T_n ein endlich-dimensionales Bild hat und deshalb kompakt ist; es existiert also ein (endliches) singuläres System $\{(\mu_k, \tilde{u}_k, \tilde{v}_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}}$, und aus (3.7) folgt

$$\|T_n^\dagger y\|_X^2 = \sum_{k=1}^n \mu_k^{-2} |(y, \tilde{u}_k)_Y|^2 \le \mu_n^{-2} \|y\|_Y^2 \qquad \text{für alle } y \in Y,$$

mit Gleichheit für $y = \tilde{u}_n \in Y$, d. h. $\|T_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \mu_n^{-1}$. Da Q_n eine orthogonale Projektion ist, gilt für $x_n^\delta = T_n^\dagger Q_n y^\delta$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \le \delta$

$$\|x_n^\delta - x_n\|_X = \|T_n^\dagger Q_n (y^\delta - y)\|_X \le \|T_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|y^\delta - y\|_Y \le \frac{\delta}{\mu_n}.$$

Wir können nun wie in Satz 4.6 vorgehen.

Satz 8.8. *Sei $y \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ sowie $y^\delta \in Y$ mit $\|y^\delta - y\|_Y \leq \delta$ und $x_n^\delta = T_n^\dagger Q_n y$. Ist $n(\delta)$ so gewählt, dass gilt*

$$n(\delta) \to \infty, \qquad \frac{\delta}{\mu_{n(\delta)}} \to 0 \qquad \text{für } \delta \to 0,$$

dann konvergiert $x_{n(\delta)}^\delta \to x^\dagger$ für $\delta \to 0$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der üblichen Zerlegung

$$\begin{aligned}\|x_{n(\delta)}^\delta - x^\dagger\|_X &\leq \|x_{n(\delta)} - x^\dagger\|_X + \|x_{n(\delta)}^\delta - x_{n(\delta)}\|_X \\ &\leq C\|(\mathrm{Id} - P_{n(\delta)})K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \mu_{n(\delta)}^{-1}\delta.\end{aligned} \tag{8.4}$$

zusammen mit der Voraussetzung und Satz 8.7. □

(Ein analoges Resultat gilt unter der Bedingung (8.2) auch für die Ausgleichsprojektion.)

Wir können uns nun fragen, wie wir Y_n für festes n wählen müssen, um den Gesamfehler zu minimieren, wofür wir wegen der Zerlegung (8.4) insbesondere μ_n maximieren müssen. Diese Frage kann für kompakte Operatoren explizit beantwortet werden, wofür wir das *Courantsche Minimax-Prinzip*[2] für Eigenwerte verwenden: Die (abfallend sortierten) Eigenwerte λ_n eines selbstadjungierten kompakten Operators $A \in \mathcal{K}(X,X)$ erfüllen

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \min_{V\subset X}\max_{x\in V}\left\{(Ax,x)_X : \|x\|_X \leq 1,\ \dim V^\perp = n-1\right\} \\ &= \max_{V\subset X}\min_{x\in V}\left\{(Ax,x)_X : \|x\|_X \leq 1,\ \dim V = n\right\}.\end{aligned}$$

Satz 8.9. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit singulärem System $\{(\sigma_n,u_n,v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $Y_n \subset Y$ mit $\dim Y_n = n$. Dann ist $\mu_n \leq \sigma_n$.*

Beweis. Da μ_n Singulärwert von K_n ist, ist μ_n^2 Eigenwert von $K_nK_n^* = Q_nKK^*Q_n$; analog ist σ_n^2 Eigenwert von KK^*. Sei für $k \in \mathbb{N}$ weiterhin $U_k := \operatorname{span}\{u_1,\dots,u_k\} \subset \overline{\mathcal{R}(K^*)}$. Wegen $\dim Y_n = n$ existiert ein $\bar y \in U_{n-1}^\perp \cap Y_n$ mit $\|\bar y\|_Y = 1$ (sonst müsste $U_{n-1}^\perp \subset Y_n^\perp$ sein, hat dafür aber zu kleine Kodimension). Aus dem Courantschen Minimax-Prinzip folgt dann

$$\begin{aligned}\mu_n^2 &= \max_V \min_y \left\{(Q_nKK^*Q_ny,y)_y : \|y\|_Y \leq 1,\ y \in V,\ \dim V = n\right\} \\ &= \min_y \left\{(KK^*y,y)_Y : \|y\|_Y \leq 1,\ y \in Y_n\right\} \leq (KK^*\bar y,\bar y)_Y \\ &\leq \max_y \left\{(KK^*y,y)_Y : \|y\|_Y \leq 1,\ y \in U_{n-1}^\perp\right\} = \sigma_n^2,\end{aligned}$$

denn das Maximum wird für $y = u_n \in U_{n-1}^\perp$ angenommen. □

[2] z. B. [Kaballo 2011, Satz 12.6]

Dabei wird Gleichheit für $Y_n = U_n$ angenommen, denn dann ist $\bar{y} = u_n$ der einzige Vektor, der im Beweis in Frage kommt. Dies entspricht aber genau der abgeschnittenen Singulärwertentwicklung aus Beispiel 5.2 (i). Tatsächlich ist die Wahl $Y_n = U_n$ auch optimal bezüglich des Verfahrensfehlers.

Satz 8.10. *Sei $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit singulärem System $\{(\sigma_n, u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $Y_n \subset Y$ mit $\dim Y_n = n$. Dann ist*

$$\|(\mathrm{Id} - P_n)K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \geq \sigma_{n+1},$$

wobei für $Y_n = U_n$ Gleichheit herrscht.

Beweis. Wir verwenden wieder das Courantsche Minimax-Prinzip, diesmal für σ_n^2 Eigenwert von K^*K. Mit $X_n := K^*Y_n$ und $P_n := P_{X_n}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^2 &= \min_V \max_x \left\{(K^*Kx, x)_X : \|x\|_X \leq 1,\ x \in V \subset X,\ \dim V^\perp = n\right\}\\
&\leq \max_x \left\{(K^*Kx, x)_X : \|x\|_X \leq 1,\ x \in X_n^\perp\right\}\\
&= \max_x \{(K^*K(I - P_n)x, (I - P_n)x)_X : \|x\|_X \leq 1\}\\
&= \max_x \left\{\|K(I - P_n)x\|_Y^2 : \|x\|_X \leq 1\right\}\\
&= \|K(\mathrm{Id} - P_n)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2 = \|(\mathrm{Id} - P_n)K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2.
\end{aligned}$$

Ist $Y_n = U_n$, so ist $X_n = K^*U_n = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und für diesen Unterraum wird das Minimum in der Ungleichung angenommen. □

Damit ist die bestmögliche Konvergenzrate für die duale Ausgleichsprojektion

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X \leq C\left(\sigma_{n+1} + \frac{\delta}{\sigma_n}\right),$$

und diese wird für die abgeschnittene Singulärwertzerlegung angenommen.

Ohne Kenntnis eines singulären Systems muss man in der Praxis n sehr klein wählen, um die Bedingung an μ_n garantieren zu können, und man erhält damit eine zu grobe Diskretisierung. Man kombiniert daher üblicherweise eine deutlich feinere Diskretisierung mit einer der bereits besprochenen Regularisierungen. Um dabei eine optimale Konvergenzrate zu erhalten und gleichzeitig unnötigen Rechenaufwand zu vermeiden, sollte dabei der Regularisierungsparameter in Abhängigkeit sowohl von δ als auch von n (bzw. n in Abhängigkeit von $\alpha(\delta)$) passend gewählt werden.

Teil III

NICHTLINEARE INVERSE PROBLEME

9 NICHTLINEARE SCHLECHT GESTELLTE PROBLEME

Wir betrachten nun für eine *nichtlineare* Abbildung $F : U \to Y$ mit $U \subset X$ und Hilberträumen X und Y die Operatorgleichung $F(x) = y$. Nichtlineare inverse Probleme tauchen in vielen Bereichen auf; so ist beispielsweise das Problem, aus Kenntnis der Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf ihre Koeffizienten zu schließen (etwa im Rahmen der elektrischen Impedanztomographie), ein nichtlineares schlechtgestelltes Problem. Wir werden diese Schlechtgestelltheit nun abstrakt charakterisieren. (Konkrete Beispiele erfordern Resultate über partielle Differentialgleichungen, die den Rahmen der Vorlesung sprengen würden.)

Ein wesentlicher Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Operatoren ist dabei, dass sich letztere auf verschiedenen Teilmengen von X sehr unterschiedlich verhalten können. Die globale Charakterisierung der Korrekt- oder Schlechtgestelltheit nach Hadamard ist daher zu restriktiv. Wir nennen die Gleichung $F(x) = y$ *lokal korrekt gestellt* in $x \in U$, wenn ein $r > 0$ existiert, so dass für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_r(x) \cap U$ mit $F(x_n) \to F(x)$ gilt $x_n \to x$. Andernfalls heißt die Gleichung *lokal schlecht gestellt* (in x). In diesem Fall existiert für alle $r > 0$ eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_r(x) \cap U$ mit $F(x_n) \to F(x)$, für die x_n nicht gegen x konvergiert. Für einen linearen Operator $T : X \to Y$ ist $Tx = y$ entweder für alle $x \in X$ lokal korrekt oder für alle $x \in X$ lokal schlecht gestellt. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn T nicht injektiv oder $\mathcal{R}(T)$ nicht abgeschlossen ist, etwa für kompakte Operatoren mit unendlichdimensionalem Bild.

Für nichtlineare Operatoren ist die Situation etwas diffiziler. Wie im linearen Fall nennen wir $F : U \to Y$ kompakt, wenn zu jeder beschränkten Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ eine konvergente Teilfolge $\{F(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ gehört. Nichtlineare kompakte Operatoren müssen aber *nicht* stetig (und damit vollstetig) sein (betrachte etwa einen beschränkten Operator mit endlichdimensionalem Bild); dies ist eine zusätzliche Forderung. Tatsächlich genügt eine schwächere Eigenschaft: $F : U \to X$ heißt *schwach abgeschlossen*, wenn aus $x_n \rightharpoonup x \in U$ und $F(x_n) \rightharpoonup y$ folgt $F(x) = y$.

Lemma 9.1. *Sei $F : U \to Y$ kompakt und schwach abgeschlossen. Dann ist F vollstetig, bildet also schwach konvergente Folgen in X auf stark konvergente Folgen in Y ab.*

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ eine schwach konvergente Folge mit $x_n \rightharpoonup x \in U$. Dann ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, und $\{F(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt daher eine konvergente Teilfolge $\{F(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $F(x_{n_k}) \to y \in Y$. Da stark konvergente Folgen auch schwach konvergieren, folgt aus der schwachen Abgeschlossenheit $y = F(x)$. Angenommen, es gäbe nun eine Teilfolge $\{F(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen $y \neq F(x)$ konvergiert. Dann würden wir durch Anwenden der obigen Argumentation auf $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ einen Widerspruch erhalten, woraus die Konvergenz der gesamten Folge $\{F(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $F(x)$ folgt. □

Für solche Operatoren gilt ein analoges Resultat zu Folgerung 3.8.

Satz 9.2. *Sei X ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum und $F : U \to Y$ vollstetig. Dann ist $F(x) = y$ lokal schlecht gestellt in allen inneren Punkten von U.*

Beweis. Da X separabel ist, existiert eine (unendliche) Orthonormalbasis $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sei nun $x \in U$ ein innerer Punkt und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$, und setze $x_n := x + \frac{r}{2}u_n \in B_r(x)$. Dann ist $\|x_n - x\|_X = \frac{r}{2}$, aus der schwachen Konvergenz $u_n \rightharpoonup 0$ jeder Orthonormalbasis folgt aber $x_n \rightharpoonup x$ und damit $F(x_n) \to F(x)$ wegen der Vollstetigkeit von F. □

Wie im linearen Fall definieren wir nun Minimum-Norm-Lösungen und Regularisierungsoperatoren. Da für nichtlineare Operatoren die Null ihre Sonderrolle verliert, bezeichnen wir für ein $y \in \mathcal{R}(F)$ und ein $x_0 \in X$ ein $x^\dagger \in U$ mit $F(x^\dagger) = y$ und

$$\|x^\dagger - x_0\|_X = \min\{\|x - x_0\|_X : F(x) = y\}$$

als *x_0-Minimum-Norm-Lösung*. Für nichtlineare inverse Probleme muss diese, im Gegensatz zum linearen Fall, nicht eindeutig sein! Ihre Existenz setzt auch voraus, dass $F(x) = y$ überhaupt eine Lösung besitzt. Eine Regularisierung von $F(x) = y$ besteht nun aus einer Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ stetiger (nichtlinearer) Operatoren $R_\alpha : X \times Y \to X$ so dass $R_\alpha(x_0, y)$ für $\alpha \to 0$ gegen eine x_0-Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$ konvergiert. Zusammen mit einer Parameterwahlstrategie für α definiert man nun wie gehabt ein (konvergentes) Regularisierungsverfahren.

Für nichtlineare inverse Problem lassen sich Regularisierungsoperatoren in der Regel nicht explizit angeben; die meisten Verfahren basieren stattdessen auf einer (iterativen) Linearisierung des Problems. Dafür benötigt man einen geeigneten Ableitungsbegriff für Operatoren zwischen normierten Räumen. Seien X, Y normierte Räume, $F : U \to Y$ eine Abbildung mit $U \subset X$ und $x \in U$ sowie $h \in X$.

- Existiert der einseitige Grenzwert

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} =: F'(x; h),$$

  so nennen wir diesen *Richtungsableitung* in x in Richtung h.

- Falls $F'(x;h)$ für alle $h \in X$ existiert und durch
$$DF(x)h := F'(x;h)$$
ein linearer beschränkter Operator definiert wird, so heißt F *Gâteaux-differenzierbar* (in x) und $DF \in \mathcal{L}(X,Y)$ *Gâteaux-Ableitung*.
- Gilt zusätzlich
$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - DF(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0,$$
so heißt F *Fréchet-differenzierbar* (in x) und $F'(x) := DF(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ *Fréchet-Ableitung*.
- Ist die Abbildung $x \mapsto F'(x)$ (Lipschitz-)stetig, so heißt F *(Lipschitz-)stetig differenzierbar*.

Der Unterschied zwischen Gâteaux- und Fréchet-Differenzierbarkeit liegt also im Approximationsfehler von F in der Nähe von x durch $F(x) + DF(x)h$: Während für Gâteaux-differenzierbare Funktionen dieser nur beschränkt durch $\|h\|_X$ – also linear in $\|h\|_X$ – sein muss, ist er für Fréchet-differenzierbare Funktionen sogar superlinear in $\|h\|_X$. (Für eine feste Richtung h ist dies natürlich auch für Gâteaux-differenzierbare Funktionen der Fall; für Fréchet-differenzierbare Funktionen ist zusätzlich also Gleichmäßigkeit in h gefordert.)

Ist F Gâteaux-differenzierbar, kann man die Gâteaux-Ableitung berechnen via
$$DF(x)h = \left(\tfrac{d}{dt}F(x+th)\right)\Big|_{t=0}.$$

Offensichtlich sind lineare beschränkte Operatoren $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $DT = T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Beachten Sie, dass Ableitungen eines Funktionals $F : X \to \mathbb{R}$ lineare Operatoren in $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ sind, und daher nicht zu Vektoren in X addiert werden können. In Hilbert-Räumen (darunter auch $\mathbb{R}^n$) kann man aber $DF(x)$ mit Hilfe des Satz von Riesz–Fischer kanonisch mit einem Element $\nabla F(x) \in X$, genannt *Gradient* von F, identifizieren über
$$DF(x)h = (\nabla F(x), h)_X \qquad \text{für alle } h \in X.$$

Als Beispiel betrachten wir für die durch das Skalarprodukt induzierte Norm in einem Hilbertraum das Funktional $F(x) = \frac{1}{2}\|x\|_X^2$. Dann gilt für alle $x, h \in X$, dass
$$F'(x;h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(x+th, x+th)_X - \frac{1}{2}(x,x)_X}{t} = (x,h)_X = DF(x)h,$$
da das Skalarprodukt für festes x linear und stetig in h ist. Die quadrierte Norm ist also Gâteaux-differenzierbar in x mit Ableitung $DF(x) : h \mapsto (x,h)_X$ und Gradient $\nabla F(x) = x \in X$; wegen
$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\left|\frac{1}{2}\|x+h\|_X^2 - \frac{1}{2}\|x\|_X^2 - (x,h)_X\right|}{\|h\|_X} = \lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{1}{2}\|h\|_X = 0$$

ist sie sogar Fréchet-differenzierbar. Fasst man nun dieselbe Abbildungsvorschrift auf als definiert auf einem kleineren Hilbertraum $X' \hookrightarrow X$ (zum Beispiel $X = L^2(\Omega)$, $X' = H^1(\Omega)$), so ist immer noch $DF(x)h = (x, h)_X \in \mathcal{L}(X', \mathbb{R})$, aber $\nabla F \in X'$ ist nun charakterisiert durch

$$DF(x)h = (\nabla F(x), h)_{X'} \qquad \text{für alle } h \in X'.$$

Unterschiedliche Skalarprodukte führen daher zu unterschiedlichen Gradienten.

Weitere Ableitungen erhält man durch die üblichen Rechenregeln für Fréchet-Ableitungen. Beispielhaft sei hier die Kettenregel angegeben.

Satz 9.3. *Seien X, Y, Z Banachräume, $U \subset X$ und $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar in $x \in U$ und $G : Y \to Z$ Fréchet-differenzierbar in $y = F(x) \in Y$. Dann ist $G \circ F$ Fréchet-differenzierbar in x und*

$$(G \circ F)'(x) = G'(F(x)) \circ F'(x).$$

Eine analoge Regel für Gâteaux-Ableitungen gilt dagegen nicht!

Eine naheliegende Frage ist nun nach dem Zusammenhang zwischen der lokalen Schlechtgestelltheit von $F(x) = y$ in x und der Schlechtgestelltheit der Linearisierung $F'(x)h = 0$. Das folgende Resultat legt nahe, dass sich zumindest für vollstetige Operatoren die Schlechtgestelltheit überträgt.

Satz 9.4. *Sei $F : U \to Y$ vollstetig und Fréchet-differenzierbar in $x \in U$. Dann ist $F'(x)$ kompakt.*

Beweis. Sei $x \in U$ beliebig und angenommen, $F'(x)$ wäre nicht kompakt und damit nicht vollstetig. Dann existiert eine Folge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n \rightharpoonup 0$ sowie ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|F'(x)h_n\|_Y \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der schwachen Konvergenz folgt auch die Beschränktheit, und wir können (durch entsprechende Skalierung von h_n und ε) ohne Einschränkung $\|h_n\|_X \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Nach Definition der Fréchet-Ableitung existiert nun ein $\delta > 0$ so dass für alle $\|h\|_X < \delta$ gilt

$$\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{2}\|h\|_X.$$

Da $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $\tau > 0$ klein genug, dass $\|\tau h_n\|_X < \delta$ und $x + \tau h_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist (sonst wäre F in x nicht differenzierbar). Dann gilt $x + \tau h_n \rightharpoonup x$, aber für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}\|F(x+\tau h_n) - F(x)\|_Y &= \|F'(x)(\tau h_n) + F(x+\tau h_n) - F(x) - F'(x)(\tau h_n)\|_Y \\ &\geq \|F'(x)(\tau h_n)\|_Y - \|F(x+\tau h_n) - F(x) - F'(x)(\tau h_n)\|_Y \\ &\geq \tau\varepsilon - \tau\|h\|_X\frac{\varepsilon}{2} \geq \tau\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Also ist F nicht vollstetig. □

Allerdings folgt daraus nicht notwendigerweise die Schlechtgestelltheit von $F'(x)h = 0$, denn $F'(x)$ kann ein endlichdimensionales Bild haben. Umgekehrt kann ein lokal korrekt gestelltes Problem schlecht gestellte Linearisierungen haben, siehe [Engl, Kunisch u. a. 1989, Example A.1, A.2]. Dies hat natürlich auch Auswirkungen auf Regularisierungen, die auf einer Linearisierung beruhen. Der Grund für die Diskrepanz liegt darin, dass der Linearisierungsfehler zwar asymptotisch superlinear gegen Null geht, jedoch für festes h viel größer sein kann als das nichtlineare Residuum $\|F(x+h) - F(x)\|_Y$ oder das lineare Residuum $\|F'(x)h\|_Y$. Für weitergehende Aussagen benötigen wir also Bedingungen, die die Nichtlinearität von F einschränken.

Eine Möglichkeit ist, weitergehende Glattheit von F zu fordern, zum Beispiel die lokale Lipschitz-Stetigkeit der Ableitung in der Nähe von $x \in U$: Es gibt eine Konstante $L > 0$ und ein $r > 0$ so dass gilt

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq L\|x_1 - x_2\|_X \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in B_r(x). \tag{9.1}$$

Unter dieser Annahme überträgt sich tatsächlich die lokale Schlechtgestelltheit auf die Linearisierung.

Wir brauchen dafür die folgende Variante des Mittelwertsatzes. Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f : [a,b] \to X$ stetig. Wir definieren dann das *Bochner-Integral* $\int_a^b f(t)\,dt \in X$ mit Hilfe des Satz von Riesz–Fischer via

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt, x\right)_X = \int_a^b (f(t), x)_X\, dt \qquad \text{für alle } x \in X, \tag{9.2}$$

denn die linke Seite definiert wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \|f(t)\|_X$ auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ein lineares stetiges Funktional auf X. Aus der Konstruktion folgt sofort

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_X \leq \int_a^b \|f(t)\|_X\,dt. \tag{9.3}$$

Lemma 9.5. *Sei $F : U \to X$ Fréchet-differenzierbar in einer Umgebung $V \subset U$ von $x \in U$ und sei $h \in X$ so dass $x + th \in V$ für alle $t \in [0,1]$ gilt. Dann ist*

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)h\,dt.$$

Beweis. Betrachte für beliebiges $w \in X$ die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = (F(x+th), w)_X\,.$$

Nach der Kettenregel in Satz 9.3 ist f differenzierbar mit

$$f'(t) = (F'(x+th)h, w)_X\,,$$

und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{R}$ ergibt

$$(F(x+h) - F(x), w)_X = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt = \left(\int_0^1 F'(x+th)h\,dt, w\right)_X,$$

wobei die letzte Gleichung aus (9.2) folgt. Da $w \in X$ beliebig war, folgt daraus die gewünschte Gleichung. □

In diesem Fall können wir den Linearisierungsfehler sogar quadratisch abschätzen.

Lemma 9.6. *Sei $F : U \to Y$ Lipschitz-stetig differenzierbar in einer Umgebung $V \subset U$ von $x \in U$. Dann gilt für alle $h \in X$ mit $x + th \in V$ für $t \in [0,1]$*

$$\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y \leq \frac{L}{2}\|h\|_X^2.$$

Beweis. Aus der Lipschitz-Stetigkeit folgt mit Lemma 9.5 und (9.3) sofort

$$\begin{aligned}\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y &= \left\|\int_0^1 F'(x+th)h - F'(x)h\,dt\right\|_Y \\ &\leq \int_0^1 \|F'(x+th)h - F'(x)h\|\,dt \\ &\leq \int_0^1 Lt\|h\|_X^2\,dt = \frac{L}{2}\|h\|_X^2.\end{aligned}$$

Damit können wir nun die Schlechtgestelltheit der Linearisierung zeigen.

Satz 9.7. *Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar mit Lipschitz-stetiger Ableitung. Ist $F(x) = y$ lokal schlecht gestellt in $x \in U$, dann ist auch $F'(x)h = 0$ lokal schlecht gestellt in allen $h \in X$.*

Beweis. Angenommen, die nichtlineare Gleichung wäre lokal schlecht gestellt, ihre Linearisierung aber lokal korrekt gestellt. Letzteres ist äquivalent dazu, dass das Bild von $F'(x)$ abgeschlossen und $F'(x)$ injektiv ist. Also existiert eine stetige Pseudoinverse $F'(x)^\dagger$. Da mit $F'(x)^\dagger$ auch $(F'(x)^*)^\dagger = (F'(x)^\dagger)^*$ stetig ist, finden wir für alle $h \in X$ ein $w := (F'(x)^*)^\dagger h \in Y$ mit $\|w\|_Y \leq C\|h\|_X$. Sei nun $\mu \in (0,1)$ und setze $\delta := \frac{2\mu}{CL}$, dann ist insbesondere $\|w\|_Y \leq \frac{2\mu}{L}$ für alle $\|h\|_X \leq \delta$. Aus Lemma 3.4 (iv) zusammen mit $\mathcal{R}(F'(x)^*) = \overline{\mathcal{R}(F'(x)^*)} = \mathcal{N}(F'(x))^\perp = X$ (denn wenn $F'(x)^\dagger$ stetig ist, ist auch $(F'(x)^*)^\dagger$ stetig und $F'(x)^*$ hat abgeschlossenes Bild) folgt darüberhinaus

$$F'(x)^*w = F'(x)^*(F'(x)^*)^\dagger h = h.$$

Wir schätzen nun den Linearisierungsfehler mit Hilfe dieser „linearisierten Quelldarstellung“ und Lemma 9.6 ab: Für alle $h \in X$ mit $\|h\|_X \leq \delta$ gilt

$$\begin{aligned}\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y &\leq \frac{L}{2}\|h\|_X^2 = \frac{L}{2}\|F'(x)^*w\|_X^2 = \frac{L}{2}\left(F'(x)F'(x)^*w, w\right)_Y \\ &\leq \frac{L}{2}\|F'(x)F'(x)^*w\|_Y\|w\|_Y \\ &\leq \mu\|F'(x)h\|_Y.\end{aligned}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun

$$\begin{aligned}\|F'(x)h\|_Y &= \|F(x+h) - F(x) - F'(x)h - F(x+h) + F(x)\|_Y \\ &\leq \mu\|F'(x)h\|_Y + \|F(x+h) - F(x)\|_Y\end{aligned}$$

und damit

$$\|F'(x)h\|_Y \leq \frac{1}{1-\mu}\|F(x+h) - F(x)\|_Y \qquad \text{für alle } \|h\|_X \leq \delta. \tag{9.4}$$

Nun ist $F(x) = y$ lokal schlecht gestellt, also existiert eine Folge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x + h_n - x\|_X = \|h_n\|_X = \frac{\delta}{2}$ aber $F(x + h_n) \to F(x)$. Wegen (9.4) folgt daraus aber $F'(x)(x + h_n - x) = F'(x)h_n \to 0$, im Widerspruch zur lokalen Korrektgestelltheit des linearisierten Problems. □

Eine Alternative zu (9.1) ist die sogenannte *Tangentialkegelbedingung*: Für $x \in U$ existiert ein $\eta < 1$ und $\delta > 0$ so dass gilt

$$\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|_Y \leq \eta\|F(x+h) - F(x)\|_Y \qquad \text{für alle } \|h\|_X \leq \delta. \tag{9.5}$$

Hier können wir sogar Äquivalenz zeigen.

Satz 9.8. *Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar und erfülle die Tangentialkegelbedingun (9.5) in $x \in U$. Dann ist $F(x) = y$ genau dann lokal schlecht gestellt in $x \in U$, wenn $F'(x)h = 0$ lokal schlecht gestellt ist.*

Beweis. Aus der Bedingung (9.5) erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichungen

$$(1-\eta)\|F(x+h) - F(x)\|_Y \leq \|F'(x)h\|_Y \leq (1+\eta)\|F(x+h) - F(x)\|_Y \tag{9.6}$$

für alle $\|h\|_X \leq \delta$. Die zweite Ungleichung entspricht (9.4), von der wir schon gezeigt haben, dass aus ihr die lokale Schlechtgestelltheit der Linearisierung einer lokal schlechtgestellten Gleichung folgt. Analog argumentiert man für die erste Ungleichung: Angenommen, $F'(x)h = 0$ ist lokal schlecht gestellt. Dann existiert eine Folge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x + h_n - x\|_X = \|h_n\| = \frac{\delta}{2}$ aber $F'(x)h_n \to 0$, woraus mit (9.6) auch $F(x + h_n) \to F(x)$ folgt. Also ist auch $F(x) = y$ lokal schlecht gestellt. □

Die Tangentialkegelbedingung garantiert zusammen mit einer schwachen Quellbedingung sogar die lokale Eindeutigkeit der Minimum-Norm-Lösung.

Satz 9.9. *Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar, $y \in Y$ und $x_0 \in X$ gegeben. Gilt in $x^\dagger \in U$ mit $F(x^\dagger) = y$ die Tangentialkegelbedingung (9.5), und ist $x^\dagger - x_0 \in \mathcal{N}(F'(x^\dagger))^\perp$, so ist $x^\dagger$ die eindeutige Minimum-Norm-Lösung in $B_\delta(x^\dagger)$ für $\delta > 0$ aus (9.5).*

Beweis. Sei $x \in B_\delta(x^\dagger) \setminus \{x^\dagger\}$ mit $F(x) = y$ beliebig. Aus (9.5) für $h := x - x^\dagger$ und $\delta = r$ folgt dann $F'(x^\dagger)(x - x^\dagger) = 0$, d. h. $x - x^\dagger \in \mathcal{N}(F'(x^\dagger)) \setminus \{0\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_X^2 &= \|x^\dagger - x_0 + x - x^\dagger\|_X^2 \\ &= \|x^\dagger - x_0\|_X^2 + 2\left(x^\dagger - x_0, x - x^\dagger\right)_X + \|x - x^\dagger\|_X^2 \\ &> \|x^\dagger - x_0\|_X^2, \end{aligned}$$

da das Skalarprodukt aufgrund der Orthogonalität wegfällt und $x \neq x^\dagger$ angenommen war. Also ist $x^\dagger$ die (lokal) eindeutige Minimum-Norm-Lösung. □

Es sei nicht verschwiegen, dass diese abstrakten Bedingungen für konkrete nichtlineare inverse Probleme oftmals sehr schwer nachprüfbar oder sogar nachweisbar nicht erfüllt sind. Häufig wird daher nicht eine allgemeine Theorie bemüht, sondern es werden stark problemspezifische Ansätze verfolgt.[1] Trotzdem kann der abstrakte Blickwinkel nützlich sein, indem er Grenzen und Möglichkeiten aufzeigt.

[1] „Alle linearen inversen Probleme gleichen einander; jedes nichtlineare inverse Problem ist auf seine eigene Weise nichtlinear.“

10 TIKHONOV-REGULARISIERUNG

Ausgangspunkt für die Tikhonov-Regularisierung nichtlinearer Probleme ist Satz 6.5: Für gegebene $\alpha > 0$, $x_0 \in X$ und $y \in Y$ suchen wir x_α als Minimierer des Tikhonov-Funktionals

$$J_\alpha(x) := \frac{1}{2}\|F(x) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x - x_0\|_X^2.$$

Da F nicht linear ist, können wir dies nicht durch einen expliziten Regularisierungsoperator R_α ausdrücken. Wir müssen daher mit anderen Mitteln vorgehen, um die stetige Abhängigkeit eines Minimierers x_α von den Daten y sowie die Konvergenz für $\alpha \to 0$ zu untersuchen. Dafür kommen wir mit schwächeren Bedingungen an F aus: Es genügt zu fordern, dass F schwach abgeschlossen ist mit nichtleerem und schwach abgeschlossenem Definitionsbereich $\operatorname{dom} F = U$ (was wir von nun an annehmen). Unter diesen Voraussetzungen existiert für $y \in \mathcal{R}(F)$ stets eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger \in U$.

Wir zeigen zuerst die Existenz eines Minimierers. Der Beweis ist eine klassische Anwendung der *direkten Methode der Variationsrechnung*, die den Satz von Weierstrass (jede reelle stetige Funktion auf kompakten Mengen nimmt ihr Minimum und Maximum an) auf unendlichdimensionale Räume verallgemeinert.

Satz 10.1. *Sei $F : U \to Y$ schwach abgeschlossen. Dann existiert für alle $\alpha > 0$, $x_0 \in X$ und $y \in Y$ ein Minimierer $x_\alpha \in U$ von J_α.*

Beweis. Zuerst halten wir fest, dass $J_\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in U$ gilt. Also ist die Menge $\{J_\alpha(x) : x \in U\} \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und besitzt daher ein endliches Infimum. Nach Definition existiert also eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, so dass gilt

$$J_\alpha(x_n) \to m := \inf \{J_\alpha(x) : x \in U\}.$$

Eine solche Folge wird *Minimalfolge* genannt. Beachten Sie, dass wir aus der Konvergenz von $\{J_\alpha(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ noch nicht auf die Konvergenz von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ schließen können.

Aus der Definition der Minimalfolge erhalten wir jedoch, dass ein $M > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{2}\|F(x_n) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_0\|_X^2 = J_\alpha(x_n) \leq M \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{10.1}$$

(denn sonst würde $J_\alpha(x_n) \to \infty$ gelten). Daraus folgt aber

$$\frac{\alpha}{2}\left(\|x_n\|_X - \|x_0\|_X\right)^2 \leq \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_0\|_X^2 \leq J_\alpha(x_n) \leq M,$$

d. h. die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und hat daher eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\bar{x} \in U$ (da U schwach abgeschlossen ist). Dieser Grenzwert ist ein Kandidat für einen Minimierer.

Aus (10.1) folgt auch, dass $\{F(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist in Y. Durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge (die wir immer noch mit $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen) erhalten wir $F(x_k) \rightharpoonup \bar{y} \in Y$, und aus der schwachen Abgeschlossenheit von F folgt $F(x_k) \rightharpoonup F(\bar{x})$. Mit der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm impliziert dies

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|F(\bar{x}) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x} - x_0\|_X^2 &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|F(x_k) - y\|_Y^2 + \liminf_{k\to\infty} \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_0\|_X^2 \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|F(x_k) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_0\|_X^2\right),\end{aligned}$$

d. h. J_α ist schwach unterhalbstetig. Aus der Definition der Minimalfolge schließen wir nun, dass auch für die Teilfolge $J_\alpha(x_k) \to m$ gilt. Zusammen mit der schwachen Unterhalbstetigkeit und der Definition des Infimums erhalten wir

$$\inf_{x\in U} J_\alpha(x) \leq J_\alpha(\bar{x}) \leq \liminf_{k\to\infty} J_\alpha(x_k) = m = \inf_{x\in U} J_\alpha(x).$$

Das Infimum wird also in $\bar{x}$ angenommen, d. h. $J_\alpha(\bar{x}) = \min_{x\in U} J_\alpha(x)$. □

Wegen der Nichtlinearität von F wird es im Allgemeinen keinen eindeutigen Minimierer geben, weshalb die Abbildung $y \mapsto x_\alpha$ auch nicht wohldefiniert ist. Anstelle der Stetigkeit von R_α können wir also nur das folgende schwächere Stabilitätsresultat zeigen.

Satz 10.2. *Sei $F : U \to Y$ schwach abgeschlossen, $\alpha > 0$, $x_0 \in X$ und $y \in Y$ gegeben. Sei $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $y_n \to y$ und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Minimierern von J_α mit y_n anstelle von y. Dann enthält $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge, und jeder schwache Häufungswert von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Minimierer von J_α.*

Hat J_α einen eindeutigen Minimierer, so konvergiert die gesamte Folge stark.

Beweis. Nach Satz 10.1 können wir für jedes $y_n \in Y$ einen zugehörigen Minimierer $x_n \in U$ wählen. Aus der Minimierungseigenschaft der x_n folgt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein beliebiges $x \in U$ die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\|F(x_n) - y_n\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_0\|_X^2 \leq \frac{1}{2}\|F(x) - y_n\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x - x_0\|_X^2.$$

Da $y_n \to y$ konvergiert, ist die rechte Seite beschränkt in $n \in \mathbb{N}$, und daher ist sowohl $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\{F(x_n)-y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es gibt also eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $\bar{x} \in U$ mit (eventuell nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge)

$$x_k \rightharpoonup \bar{x}, \qquad F(x_k) - y_k \rightharpoonup \bar{y}.$$

Aus der Konvergenz $y_k \to y$ und der schwachen Abgeschlossenheit von F folgt daraus $F(x_k) \rightharpoonup F(\bar{x})$.

Die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm liefert dann

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\|\bar{x}-x_0\|_X^2 &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_0\|_X^2,\\ \frac{1}{2}\|F(\bar{x})-y\|_Y^2 &\leq \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|F(x_k)-y_k\|_Y^2.\end{aligned} \tag{10.2}$$

Aus der Minimierungseigenschaft der x_n erhalten wir damit

$$\begin{aligned}J_\alpha(\bar{x}) &= \frac{1}{2}\|F(\bar{x})-y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x}-x_0\|_X^2\\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|F(x_k)-y_k\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_k-x_0\|_X^2\right)\\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|F(x_k)-y_k\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_k-x_0\|_X^2\right)\\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|F(x)-y_k\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x-x_0\|_X^2\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|F(x)-y_k\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x-x_0\|_X^2\\ &= \frac{1}{2}\|F(x)-y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x-x_0\|_X^2 = J_\alpha(x)\end{aligned} \tag{10.3}$$

für beliebige $x \in U$. Also ist $\bar{x}$ ein Minimierer von J_α. Da wir diese Argumentation für jede beliebige schwach konvergente Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden können, folgt der zweite Teil der Aussage.

Ist nun x_α der eindeutige Minimierer von J_α, so konvergiert jede Teilfolge gegen diesen Grenzwert, und damit muss die gesamte Folge gegen x_α konvergieren. Um zu zeigen, dass diese Konvergenz stark ist, ist nach Lemma 8.1 lediglich $\limsup_{n\to\infty}\|x_n\|_X \leq \|x_\alpha\|_X$ nachzuweisen. Angenommen, Letzteres würde nicht gelten. Dann existiert eine Teilfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \rightharpoonup x_\alpha$ und $F(x_k) \rightharpoonup F(x_\alpha)$, aber

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k - x_0\|_X =: M > \|x_\alpha - x_0\|_X.$$

Aus (10.3) mit $x = \bar{x} = x_\alpha$ folgt nun

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|F(x_k)-y_k\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_k-x_0\|_X^2\right) = \frac{1}{2}\|F(\bar{x})-y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|\bar{x}-x_0\|_X^2.$$

Zusammen mit den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir daraus

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|F(x_k) - y_k\|_Y^2 &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|F(x_k) - y_k\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_0\|_X^2\right) - \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha}{2}\|x_k - x_0\|_X^2 \\
&= \frac{1}{2}\|F(x_\alpha) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha - x_0\|_X^2 - \frac{\alpha}{2}M^2 \\
&< \frac{1}{2}\|F(x_\alpha) - y\|_Y^2,
\end{aligned}
$$

im Widerspruch zu (10.2) und $\bar{x} = x_\alpha$. □

Es bleibt noch zu zeigen, dass x_α für $\alpha \to 0$ gegen eine x_0-Minimum-Norm-Lösung konvergiert. Im Gegensatz zum linearen Fall betrachten wir dabei gleich die Verbindung mit einer a priori-Parameterwahlregel, d. h. wir beweisen, dass die Kombination ein konvergentes Regularisierungsverfahren definiert. Es bezeichne wieder x_α^δ einen Minimierer von J_α für festes $\alpha > 0$ und gestörte Daten $y^\delta \in Y$.

Satz 10.3. *Sei $F : U \to Y$ schwach abgeschlossen und seien $y \in \mathcal{R}(F)$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$. Ist $\alpha(\delta)$ eine Parameterwahlstrategie mit*

$$
\alpha(\delta) \to 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha} \to 0 \qquad \textit{für } \delta \to 0,
$$

so hat jede Folge $\{x_{\alpha(\delta_n)}^{\delta_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n \to 0$ eine stark konvergente Teilfolge, und jeder Häufungspunkt ist eine x_0-Minimum-Norm-Lösung von $F(x) = y$. Existiert eine eindeutige Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger \in U$, so konvergiert die gesamte Folge $x_{\alpha(\delta_n)}^{\delta_n}$ stark gegen $x^\dagger$.

Beweis. Setze $\alpha_n := \alpha(\delta_n)$ und $x_n := x_{\alpha_n}^{\delta_n}$, und sei $x^\dagger$ eine x_0-Minimum-Norm-Lösung von $F(x) = y$. Aus der Minimierungseigenschaft von x_n folgt für alle $n \in\in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|F(x_n) - y^{\delta_n}\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|x_n - x_0\|_X^2 &\leq \frac{1}{2}\|F(x^\dagger) - y^{\delta_n}\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|x^\dagger - x_0\|_X^2 \\
&= \frac{\delta_n^2}{2} + \frac{\alpha_n}{2}\|x^\dagger - x_0\|_X^2.
\end{aligned} \tag{10.4}
$$

Insbesondere gilt

$$
\|x_n - x_0\|_X^2 \leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} + \|x^\dagger - x_0\|_X^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{10.5}
$$

und wegen der Konvergenz $\frac{\delta_n^2}{\alpha_n} \to 0$ bleibt die rechte Seite beschränkt. Also existiert eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $\bar{x} \in U$ mit $x_k \rightharpoonup \bar{x}$. Ebenso erhalten wir aus (10.4) die Abschätzung

$$
\frac{1}{2}\|F(x_k) - y^{\delta_k}\|_Y^2 \leq \frac{\delta_k^2}{2} + \frac{\alpha_k}{2}\|x^\dagger - x_0\|_X^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{10.6}
$$

Damit besitzt $\{F(x_k)-y^{\delta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine schwach konvergente Teilfolge (die wir weiter mit k indizieren) mit Grenzwert $\bar{y} \in Y$. Die schwache Abgeschlossenheit von F und die starke Konvergenz $y^{\delta_n} \to y$ impliziert wieder $\bar{y} = F(\bar{x}) - y$, d. h. $F(x_k) \rightharpoonup F(\bar{x})$.

Aus der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm und (10.5) folgt nun

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x_0\|_X^2 &\leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_X^2 \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_X^2 \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k^2}{\alpha_k} + \|x^\dagger - x_0\|_X^2 = \|x^\dagger - x_0\|_X^2, \end{aligned} \tag{10.7}$$

und ebenso folgt aus (10.6)

$$\|F(\bar{x}) - y\|_Y^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|F(x_k) - y^{\delta_k}\|_Y^2 \leq \lim_{k\to\infty} \left(\delta_k^2 + \alpha_k \|x^\dagger - x_0\|_X^2\right) = 0.$$

Also gilt $F(\bar{x}) = y$ und

$$\|\bar{x} - x_0\|_X \leq \|x^\dagger - x_0\|_X = \min\{\|x - x_0\|_X : F(x) = y\} \leq \|\bar{x} - x_0\|_X,$$

d. h. $\bar{x}$ ist eine x_0-Minimum-Norm-Lösung.

Es bleibt zu zeigen, dass die Teilfolge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ stark konvergiert. Dafür schreiben wir

$$\|x_k - \bar{x}\|_X^2 = \|x_k - x_0\|_X^2 - 2\,(x_k - x_0, \bar{x} - x_0)_X + \|\bar{x} - x_0\|_X^2. \tag{10.8}$$

Aus der schwachen Konvergenz $x_k \rightharpoonup \bar{x}$ folgt

$$2\,(x_k - x_0, \bar{x} - x_0)_X \to 2\,(\bar{x} - x_0, \bar{x} - x_0)_X = 2\|\bar{x} - x_0\|^2,$$

woraus zusammen mit (10.7) und $\|\bar{x} - x_0\|_X = \|x^\dagger - x_0\|_X$ folgt

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty} \|x_k - \bar{x}\|_X^2 \leq \|\bar{x} - x_0\|_X^2 - 2\|\bar{x} - x_0\|^2 + \|\bar{x} - x_0\|_X^2 = 0,$$

d. h. $x_k \to \bar{x}$. Die Aussage für eindeutiges $x^\dagger$ erhält man schließlich wieder aus einem Teilfolgen–Teilfolgen-Argument. □

Wir leiten nun Fehlerabschätzungen unter Quellbedingungen her. Dabei beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, analog zur Wahl $\nu = 1$ für lineare Probleme. Als Motivation betrachten wir wieder das Grenzproblem (6.8) für $\alpha = 0$, das im nichtlinearen Fall lautet

$$\min_{x\in U, F(x)=y} \frac{1}{2}\|x - x_0\|_X^2,$$

was aber genau die x_0-Minimum-Norm-Lösungen charakterisiert. Mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators $p \in Y$ kann diese Gleichheitsnebenbedingung transformiert werden in

$$\min_{x\in U}\max_{p\in Y} L(x,p), \qquad L(x,p) := \frac{1}{2}\|x - x_0\|_X^2 - (p, F(x) - y)_Y\,.$$

Das Verschwinden der partiellen Fréchet-Ableitung $L'_p(\bar{x},\bar{p})$ von L nach p liefert uns wieder die notwendige Bedingung $F(\bar{x}) = y$ für einen Sattelpunkt $(\bar{x},\bar{p}) \in U \times Y$. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass eine x_0-Minimum-Norm-Lösung $x^\dagger$ im Inneren von U liegt. Dann muss auch die Fréchet-Ableitung $L'_x(x^\dagger,p^\dagger)$ von L nach x im entsprechenden Sattelpunkt $(x^\dagger,p^\dagger)$ verschwinden: Für alle $h \in X$ muss also gelten

$$0 = L'_x(x^\dagger,p^\dagger)h = \left(x^\dagger - x_0, h\right)_X - \left(p^\dagger, F'(x^\dagger)h\right)_Y = \left(x^\dagger - x_0 - F'(x^\dagger)^* p^\dagger, h\right)_Y,$$

d. h. es gibt ein $p^\dagger \in Y$ mit

$$x^\dagger - x_0 = F'(x^\dagger)^* p^\dagger.$$

Dies ergibt eine Quellbedingung für den nichtlinearen Fall. Wie im letzten Kapitel benötigen wir allerdings zusätzlich eine Bedingung an die Nichtlinearität von F in der Minimum-Norm-Lösung; hier verwenden wir die Lipschitzbedingung (9.1).

Satz 10.4. *Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar mit* $\operatorname{dom}(F) = U$ *konvex, $y \in \mathcal{R}(F)$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \le \delta$, und sei $x^\dagger$ eine x_0-Minimum-Norm-Lösung mit*

(i) F' ist Lipschitz-stetig mit Konstante L;

(ii) es gibt ein $w \in Y$ mit $x^\dagger - x_0 = F'(x^\dagger)^* w$ und $L\|w\|_Y < 1$.

Sei $\alpha(\delta)$ eine Parameterwahlstrategie mit

$$c\delta \le \alpha(\delta) \le C\delta \qquad \text{für } c, C > 0.$$

Dann existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass für $\delta > 0$ klein genug gilt

$$\|x^\delta_{\alpha(\delta)} - x^\dagger\|_X \le c_1\sqrt{\delta},$$
$$\|F(x^\delta_{\alpha(\delta)}) - y^\delta\|_Y \le c_2\delta.$$

Beweis. Aus der Minimierungseigenschaft von x_α^δ für $\alpha := \alpha(\delta)$ folgt wieder

$$\frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2 \le \frac{\delta^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\|x^\dagger - x_0\|_X^2,$$

was wir zusammen mit (10.8) für $x_k = x_\alpha^\delta$ und $\bar{x} = x^\dagger$ sowie der Quellbedingung (ii) umformen können zu

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 &\le \frac{\delta^2}{2} + \alpha\left(x^\dagger - x_0, x^\dagger - x_\alpha^\delta\right)_X \\ &= \frac{\delta^2}{2} + \alpha\left(w, F'(x^\dagger)(x^\dagger - x_\alpha^\delta)\right)_Y \\ &\le \frac{\delta^2}{2} + \alpha\|w\|_Y\|F'(x^\dagger)(x^\dagger - x_\alpha^\delta)\|_Y.\end{aligned} \tag{10.9}$$

Da $x_\alpha^\delta, x^\dagger \in U$ und U konvex ist, können wir wegen Bedingung (i) Lemma 9.6 auf $x = x_\alpha^\delta$ und $h = x^\dagger - x_\alpha^\delta \in U$ anwenden und erhalten

$$\|F(x^\dagger) - F(x_\alpha^\delta) - F'(x)(x^\dagger - x_\delta^\alpha)\|_Y \leq \frac{L}{2}\|x^\dagger - x_\alpha^\delta\|_X^2,$$

woraus mit den Dreiecksungleichungen folgt

$$\begin{aligned}\|F'(x)(x^\dagger - x_\alpha^\delta)\|_Y &\leq \frac{L}{2}\|x^\dagger - x_\alpha^\delta\|_X^2 + \|F(x_\alpha^\delta) - F(x^\dagger)\|_Y \\ &\leq \frac{L}{2}\|x^\dagger - x_\alpha^\delta\|_X^2 + \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y + \delta.\end{aligned} \tag{10.10}$$

Einsetzen in (10.9) ergibt dann

$$\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \alpha\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 \leq \delta^2 + \alpha\|w\|_Y \left(L\|x^\dagger - x_\alpha^\delta\|_X^2 + 2\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y + 2\delta\right).$$

Addieren von $\alpha^2\|w\|_Y^2$ auf beiden Seiten und Umsortieren führt dann auf

$$\left(\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y - \alpha\|w\|_Y\right)^2 + \alpha(1 - L\|w\|_Y)\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 \leq (\delta + \alpha\|w\|_Y)^2.$$

Durch Weglassen jeweils eines Terms auf der linken Seite und Verwenden der Parameterwahlregel $\alpha \leq C\delta$ erhalten wir daraus

$$\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 \leq \delta + 2\alpha\|w\|_Y \leq (1 + 2C\|w\|_Y)\delta$$

sowie, wegen der Annahme $L\|w\|_Y < 1$,

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X \leq \frac{\delta + \alpha\|w\|_Y}{\sqrt{\alpha(1 - L\|w\|_Y)}} \leq \frac{1 + C\|w\|_Y}{\sqrt{c(1 - L\|w\|_Y)}}\sqrt{\delta},$$

womit wir die gewünschten Abschätzungen gezeigt haben. □

Mit etwas mehr Aufwand kann man analog zu Folgerung 6.1 auch unter der stärkeren Quellbedingung $x^\dagger - x^0 \in \mathcal{R}((F'(x^\dagger)^*F'(x^\dagger))^{\nu/2})$ die höhere Rate $\delta^{\nu/(\nu+1)}$ bis zur Qualifikation $\nu_0 = 2$ zeigen; siehe [Engl, Hanke u. a. 1996, Theorem 10.7].

Wir betrachten als nächstes die a posteriori Wahl von α nach dem Diskrepanzprinzip: Wähle $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ so, dass für ein $\tau > 1$ gilt

$$\delta < \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y \leq \tau\delta. \tag{10.11}$$

Satz 10.5. *Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar mit $\operatorname{dom}(F) = U$ konvex, $y \in \mathcal{R}(F)$ und $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$, und sei $x^\dagger$ eine x_0-Minimum-Norm-Lösung, die den Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 10.4 genügt. Ist x_α^δ ein Minimierer von J_α, der (10.11) erfüllt, so existiert eine Konstante $c > 0$ mit*

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X \leq c\sqrt{\delta}.$$

Beweis. Aus (10.11) und der Minimalität von x_α^δ folgt

$$\frac{\delta^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2 < \frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2 \le \frac{\delta^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\|x^\dagger - x_0\|_X^2,$$

und damit

$$\frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2 \le \frac{\alpha}{2}\|x^\dagger - x_0\|_X^2.$$

Analog zu (10.9) und (10.10) erhalten wir daraus unter Verwendung der Bedingungen (i) und (ii) sowie der Parameterwahl (10.11), dass

$$\begin{aligned}\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 &\le \|w\|_Y \left(L\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 + 2\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y + 2\delta\right)\\ &\le \|w\|_Y \left(L\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 + 2(1+\tau)\delta\right).\end{aligned}$$

Wegen $L\|w\|_X < 1$ können wir wieder auflösen und erhalten mit

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 \le \frac{2(1+\tau)\|w\|_Y}{1 - L\|w\|_Y}\delta$$

die gewünschte Abschätzung. □

Im Gegensatz zur linearen Tikhonov-Regularisierung ist allerdings nicht garantiert, dass ein α existiert, so dass (10.11) erfüllt ist; dies erfordert (starke) Annahmen an die Nichtlinearität von F. Eine hinreichende – und allgemeinere – Annahme ist die Eindeutigkeit der Minimierer von J_α, zusammen mit einer Bedingung an x_0.

Satz 10.6. *Für $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \le \delta$ und beliebiges $\alpha > 0$ habe J_α einen eindeutigen Minimierer x_α^δ. Gilt $\|F(x_0) - y^\delta\|_Y > \tau\delta$, so existiert ein $\alpha > 0$ mit (10.11).*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit der Wertefunktion $f(\alpha) := \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y$. Sei dafür $\alpha > 0$ beliebig und $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\alpha_n \to \alpha$ für $n \to \infty$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $0 < \alpha - \varepsilon \le \alpha_n \le \alpha + \varepsilon$ für alle $n > N$. Sei weiterhin x_α^δ der eindeutige Minimierer von J_α, und für alle $n > N$ sei $x_n := x_{\alpha_n}^\delta$ der Minimierer von J_{α_n}. Aus der Minimalität von x_n bezüglich J_{α_n} für alle $n > N$ folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|F(x_n) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha-\varepsilon}{2}\|x_n - x_0\|_X^2 &\le \frac{1}{2}\|F(x_n) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|x_n - x_0\|_X^2\\ &\le \frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2\\ &\le \frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha+\varepsilon}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2,\end{aligned}$$

d. h. sowohl $\{x_n\}_{n>N}$ als auch $\{F(x_n)\}_{n>N}$ sind beschränkt. Wie im Beweis von Satz 10.2 folgt nun

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|F(x_n) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|x_n - x_0\|_X^2\right) = \frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2$$

sowie $x_n \to x_\alpha^\delta$. Also ist $\alpha \mapsto x_\alpha^\delta$ stetig. Zusmammen mit der Stetigkeit der Norm folgt daraus die Stetigkeit von $g : \alpha \mapsto \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x_0\|_X^2$ und damit auch von f.

Mit Hilfe der Minimalitätseigenschaft von x_α^δ zeigt man wie im linearen Fall nun

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y &= \|F(x_0) - y^\delta\|_Y > \tau\delta,\\ \lim_{\alpha\to 0} \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y &= \inf_{x\in U} \|F(x) - y^\delta\|_Y \leq \|F(x^\dagger) - y^\delta\|_Y \leq \delta.\end{aligned}$$

Also nimmt die stetige Funktion $f(\alpha)$ alle Werte in $(\delta, \tau\delta)$ an; insbesondere existiert daher ein α, so dass (10.11) erfüllt ist. □

Da es sich bei J_α unter diesen Voraussetzungen um ein differenzierbares, nichtlineares Funktional handelt, kann man für die numerische Berechnung von x_α^δ die Standard-Verfahren der nichtlinearen Optimierung wie zum Beispiel Gradienten- oder (Quasi-)Newton-Verfahren anwenden. Auch hier führt eine fehlende Eindeutigkeit der Minimierers x_α zu praktischen Schwierigkeiten. Eine weitere Hürde besteht darin, dass sämtliche Aussagen nur auf *globale* Minimierer des Tikhonov-Funktionals zutreffen, numerische Verfahren in der Regel aber nur lokale Minimierer von nichtkonvexen Problemen finden können. Diese Lücke zwischen Theorie und Praxis nichtlinearer inverser Probleme ist bislang noch ein offenes Thema.

Im Beweis von Satz 10.4 haben wir die Quell- und Nichtlinearitätsbedingung verwendet, um die rechte Seite von (10.9) durch geeignete Vielfache der Terme auf der linken Seite abzuschätzen. Dies lässt sich natürlich auch direkt als Quellbedingung formulieren, ohne den Umweg über Quelldarstellung und Lipschitzkonstante (die ja in gewisser Weise willkürlich eingeführt wurden). In den letzten Jahren haben daher sogenannte *variationelle Quellbedingungen* wachsendes Interesse auf sich gezogen, die in unserem Kontext die folgende Form haben: Es existieren $\beta_1 \in [0, 1)$ und $\beta_2 \geq 0$ mit

$$\left(x^\dagger - x_0, x^\dagger - x\right)_X \leq \beta_1 \left(\tfrac{1}{2}\|x - x^\dagger\|_X^2\right) + \beta_2\|F(x) - F(x^\dagger)\|_Y \quad \text{für alle } x \in U \tag{10.12}$$

für eine hinreichend grosse Umgebung U von $x^\dagger$ (die insbesondere alle Minimierer von J_α einschließt). Zu beachten sind die unterschiedlichen Potenzen auf der rechten Seite, die die unterschiedlichen Konvergenzgeschwindigkeiten von Lösung und Residuum ausgleichen sollen. Der wesentliche Vorteil ist hier, dass diese Bedingung ohne Fréchet-Ableitung auskommt und daher auch für nicht-differenzierbares F anwendbar ist.

Satz 10.7. *Seien $y \in \mathcal{R}(F)$, $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta$, und sei $x^\dagger$ eine x_0-Minimum-Norm-Lösung, die (10.12) mit $\beta_1 < 1$ erfüllt. Ist $\alpha(\delta)$ eine Parameterwahlstrategie mit*

$$c\delta \leq \alpha(\delta) \leq C\delta \qquad \text{für } c, C > 0,$$

dann existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned}\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x^\dagger\|_X &\leq c_1\sqrt{\delta},\\ \|F(x_{\alpha(\delta)}^\delta) - y^\delta\|_X &\leq c_2\delta.\end{aligned}$$

Beweis. Aus der Minimierungseigenschaft von x_α^δ erhalten wir wieder die erste Ungleichung von (10.9), die wir mit der variationellen Quellbedingung, der Dreiecks- und verallgemeinerten Youngschen Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$, sowie der Parameterwahlregel weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 &\leq \frac{\delta^2}{2} + \alpha\left(x^\dagger - x_0, x^\dagger - x_\alpha^\delta\right)_X \\
&\leq \frac{\delta^2}{2} + \alpha\beta_1\left(\tfrac{1}{2}\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2\right) + \alpha\beta_2\|F(x_\alpha^\delta) - F(x^\dagger)\|_Y \\
&\leq \frac{\delta^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\beta_1\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 + \alpha\beta_2\left(\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y + \delta\right) \\
&\leq \frac{\delta^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\beta_1\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 + \alpha^2\beta_2^2 + \frac{1}{4}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2 \\
&\quad + \alpha\beta_2\delta \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + C^2\beta_2^2 + C\beta_2\right)\delta^2 + \frac{\alpha}{2}\beta_1\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y^2.
\end{aligned}$$

Wegen $\beta_1 < 1$ können wir die letzten beiden Terme auf der rechten Seite in der linken Seite absorbieren und erhalten

$$\|x_\alpha^\delta - x^\dagger\|_X \leq \sqrt{\frac{1 + 2C\beta_2 + 2C^2\beta_2^2}{c(1-\beta_1)}}\sqrt{\delta}$$

sowie

$$\|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|_Y \leq \sqrt{2 + 4C\beta_2 + 4C^2\beta_2^2}\,\delta$$

und damit die gewünschten Abschätzungen. □

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen variationellen und klassischen Quellbedingungen.

Lemma 10.8. *Sei $F : U \to Y$ Fréchet-differenzierbar und $x^\dagger$ eine x_0-Minimum-Norm-Lösung. Existiert ein $w \in Y$ mit $x^\dagger - x_0 = F'(x^\dagger)^* w$ und ist entweder*

(i) F' Lipschitz-stetig mit $L\|w\|_Y < 1$ oder

(ii) die Tangentialkegelbedingung (9.5) erfüllt,

so gilt die variationelle Quellbedingung (10.12).

Beweis. Wir verwenden zuerst die klassische Quellbedingung auf der linken Seite von (10.12) und schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\left(x^\dagger - x_0, x^\dagger - x\right)_X &= \left(F'(x^\dagger)^* w, x^\dagger - x\right)_X \\
&= \left(w, F'(x^\dagger)(x^\dagger - x)\right)_Y \\
&\leq \|w\|_Y \|F'(x^\dagger)(x^\dagger - x)\|_Y \\
&\leq \|w\|_Y \left(\|F(x) - F(x^\dagger) - F'(x^\dagger)(x^\dagger - x)\|_Y + \|F(x) - F(x^\dagger)\|_Y\right).
\end{aligned}$$

Ist nun Bedingung (i) erfüllt, können wir Lemma 9.6 anwenden und erhalten

$$\left(x^\dagger - x_0, x^\dagger - x\right)_X \leq \|w\|_Y \left(\tfrac{L}{2}\|x^\dagger - x\|_X^2 + \|F(x) - F(x^\dagger)\|_Y\right),$$

d. h. (10.12) mit $\beta_1 = L\|w\|_Y < 1$ und $\beta_2 = \|w\|_Y$.

Gilt Bedingung (ii), so können wir direkt abschätzen

$$\left(x^\dagger - x_0, x^\dagger - x\right)_X \leq \|w\|_Y(\eta + 1)\|F(x) - F(x^\dagger)\|_Y,$$

woraus (10.12) mit $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = (1 + \eta)\|w\|_Y > 0$ folgt. □

Für lineare Operatoren $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist eine Nichtlinearitätsbedingung natürlich hinfällig; in diesem Fall ist die variationelle Quellbedingung (10.12) äquivalent mit der klassischen Quellbedingung $x^\dagger \in \mathcal{R}(T^*)$, siehe z. B. [Andreev u. a. 2015, Lemma 2]. Für nichtlineare Operatoren ist sie aber eine schwächere (wenn auch abstraktere) Bedingung. Sie ist aber vor allem deshalb von Interesse, weil sie sich auf nichtdifferenzierbare Varianten der Tikhonov-Regularisierung, insbesondere in Banachräumen, verallgemeinern lässt, siehe etwa [Hofmann u. a. 2007; Scherzer u. a. 2009; Schuster u. a. 2012].

11 ITERATIVE REGULARISIERUNG

Auch für nichtlineare inverse Probleme existieren iterative Verfahren, die wie die Landweber-Iteration eine Folge von Näherungen konstruieren, welche bei passend gewähltem Abbruchkriterium als Regularisierung aufgefasst werden kann. Konkret verstehen wir unter einem *(konvergenten) iterativen Regularisierungsverfahren* ein Verfahren, dass für gegebenes $y^\delta \in Y$ und $x_0 \in U$ eine Folge $\{x_n^\delta\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ konstruiert, zusammen mit einem Abbruchindex $N(\delta, y^\delta)$, so dass für alle $y \in \mathcal{R}(F)$ und alle $x_0 = x_0^\delta$ hinreichend nahe bei einer isolierten Lösung $x^\dagger \in U$ von $F(x) = y$ das Verfahren konvergent ist im folgenden Sinn:[1]

$$N = N(0, y) < \infty, \quad x_N = x^\dagger \qquad \text{oder} \qquad N = \infty, \quad x_n \to x^\dagger \text{ für } n \to \infty, \tag{11.1}$$

$$\limsup_{\delta\to 0} \left\{ \|x^\delta_{N(\delta,y^\delta)} - x^\dagger\|_X : y^\delta \in Y, \|y^\delta - y\|_Y \le \delta \right\} = 0. \tag{11.2}$$

Die erste Bedingung besagt dabei, dass das Verfahren für exakte Daten (d. h. $\delta = 0$) gegen eine Lösung konvergiert (wenn sie sie nicht schon nach endlich vielen Schritten erreicht); die zweite entspricht der üblichen Konvergenzbedingung für Regularisierungsverfahren.

Als Abbruchkriterium verwenden wir wieder das Diskrepanzprinzip: Setze $\tau > 1$ und wähle $N = N(\delta, y^\delta)$ so, dass gilt

$$\|F(x_N^\delta) - y^\delta\|_Y \le \tau\delta < \|F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y \qquad \text{für alle } n < N. \tag{11.3}$$

In diesem Fall ist eine hinreichende Voraussetzung für die Bedingung (11.2) die Stabilität und Monotonie des Verfahrens. Wir bezeichnen hier und in Folge wieder x_n als die Iterierten, die das Verfahren für exakte Daten $y \in \mathcal{R}(F)$ konstruiert, und x_n^δ als die entsprechenden Iterierten für $y^\delta \in Y$ mit $\|y - y^\delta\|_Y \le \delta$.

Lemma 11.1. *Sei $N(\delta, y^\delta)$ nach dem Diskrepanzprinzip (11.3) gewählt. Erfüllt ein iteratives Verfahren für $F : U \to Y$ stetig die Bedingung (11.1) sowie*

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X \le \|x_{n-1}^\delta - x^\dagger\|_X \qquad \text{für alle } n \in \{1, \dots, N(\delta, y^\delta)\}, \tag{11.4}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \|x_n^\delta - x_n\|_X = 0 \qquad \text{für alle } n \in \{1, \dots, \bar N\} \text{ hinreichend groß}, \tag{11.5}$$

so ist auch die Bedingung (11.2) erfüllt.

[1] Abweichend von den vorigen Kapiteln bezeichnet $x^\dagger$ hier nicht mehr eine (x_0-)Minimum-Norm-Lösung, sondern lediglich eine beliebige Lösung von $F(x) = y$.

Beweis. Sei $F : U \to Y$ stetig, $\{y^{\delta_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $\|y - y^{\delta_k}\|_Y \le \delta_k$ und $\delta_k \to 0$ für $k \to \infty$, und setze $N_k := N(\delta_k, y^{\delta_k})$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ einen endlichen Häufungspunkt $\bar N < \infty$ besitzt. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $N_k = \bar N$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dann folgt aus (11.5), dass $x_{\bar N}^{\delta_k} \to x_{\bar N}$ für $k \to \infty$ konvergiert. Da alle N_k nach dem Diskrepanzprinzip (11.3) gewählt sind, gilt weiter

$$\|F(x_{\bar N}^{\delta_k}) - y^{\delta_k}\|_Y \le \tau\delta_k \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Grenzübergang auf beiden Seiten zusammen mit der Stetigkeit von F liefert $F(x_{\bar N}) = y$, d. h. $x_{\bar N}^{\delta_k}$ konvergiert gegen eine Lösung von $F(x) = y$ und damit ist Bedingung (11.2) erfüllt.

Andernfalls gilt $N_k \to \infty$. Wir nehmen (wieder notfalls durch Betrachtung einer Teilfolge) an, dass N_k monoton wachsend ist. Aus (11.4) folgt dann für alle $l \le k$

$$\|x_{N_k}^{\delta_k} - x^\dagger\|_X \le \|x_{N_l}^{\delta_k} - x^\dagger\|_X \le \|x_{N_l}^{\delta_k} - x_{N_l}\|_X + \|x_{N_l} - x^\dagger\|_X.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da wir Bedingung (11.1) vorausgesetzt haben, existiert ein $L > 0$, so dass $\|x_{N_L} - x^\dagger\|_X \le \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Analog folgt aus (11.5) für $n = N_L$ die Existenz eines $K > 0$, so dass $\|x_{N_L}^{\delta_k} - x_{N_L}\|_X \le \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \ge K$ gilt. Damit ist wieder Bedingung (11.2) gezeigt. □

Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die (11.4) erfüllt, heißt *Féjer-monoton*; diese Eigenschaft bildet den Kern von Konvergenzbeweisen für viele iterative Verfahren.

Iterative Verfahren für nichtlineare inverse Probleme beruhen in der Regel auf einer Linearisierung von F, wobei sich die Verfahren darin unterscheiden, an welcher Stelle linearisiert wird.

11.1 LANDWEBER-ITERATION

Analog zur linearen Landweber-Regularisierung gehen wir aus von der Charakterisierung der gesuchten Lösung $x^\dagger$ als Minimierer des Funktionals $J_0(x) = \frac{1}{2}\|F(x)-y\|_Y^2$. Ist F Fréchet-differenzierbar, so folgt mit Hilfe der Kettenregel die notwendige Optimalitätsbedingung

$$0 = J_0'(x^\dagger)h = \left(F(x^\dagger) - y, F(x^\dagger)'h\right)_Y = \left(F'(x^\dagger)^*(F(x^\dagger) - y), h\right)_X \qquad \text{für alle } h \in X.$$

Dies ist nun eine nichtlineare Gleichung für $x^\dagger$, die wir genau wie im linearen Fall als Fixpunktgleichung schreiben können. Dies führt auf die (nichtlineare) Richardson-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \omega_n F'(x_n)^*(F(x_n) - y), \tag{11.6}$$

für die wir Konvergenz erwarten können, falls $\omega_n\|F'(x_n)^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}^2 \le 1$ ist. (Man kann (11.6) auch als Gradientenverfahren mit Schrittweite ω_n für die Minimierung von J_0 interpretieren.) Der Einfachheit halber nehmen wir in Folge an, dass $\|F'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le 1$ für alle x

hinreichend nahe bei $x^\dagger$ gilt, so dass wir $\omega_n = 1$ setzen können. (Dies ist keine große Einschränkung, da wir F und y entsprechend skalieren können, ohne die Gleichung $F(x) = y$ zu ändern.) Weiter nehmen wir an, dass F stetig Fréchet-differenzierbar ist und die Tangentialkegelbedingung (9.5) in einer Umgebung um $x^\dagger$ erfüllt. Unter diesen Annahmen, die wir gleich präzisieren werden, ist die nichtlineare Landweber-Iteration (11.6) wohldefiniert und Féjer-monoton.

Lemma 11.2. *Sei $F : U \to Y$ stetig differenzierbar. Angenommen, für $x_0 \in U$ existiert ein $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset U$, so dass eine Lösung $x^\dagger \in B_r(x_0)$ existiert, und es gilt für alle $x, \tilde{x} \in B_{2r}(x_0)$*

$$\|F'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq 1, \tag{11.7a}$$

$$\|F(x) - F(\tilde{x}) - F'(x)(x - \tilde{x})\|_Y \leq \eta \|F(x) - F(\tilde{x})\|_Y \qquad \textit{mit } \eta < \tfrac{1}{2}. \tag{11.7b}$$

Ist $x_n^\delta \in B_r(x^\dagger)$ für $\delta \geq 0$ und gilt

$$\|F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y \geq 2\frac{1+\eta}{1-2\eta}\delta, \tag{11.8}$$

so gilt

$$\|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|_X \leq \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X$$

und damit $x_{n+1}^\delta \in B_r(x^\dagger) \subset B_{2r}(x_0)$.

Beweis. Aus der Iterationsvorschrift (11.6) erhalten wir unter Verwendung von (11.7a) für $x_n^\delta \in B_r(x^\dagger) \subset B_{2r}(x_0)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|_X^2 - \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X^2 &= 2\left(x_{n+1}^\delta - x_n^\delta, x_n^\delta - x^\dagger\right)_X + \|x_{n+1}^\delta - x_n^\delta\|_X^2 \\
&= 2\left(F'(x_n^\delta)^*(y^\delta - F(x_n^\delta)), x_n^\delta - x^\dagger\right)_X \\
&\qquad + \|F'(x_n^\delta)^*(y^\delta - F(x_n^\delta))\|_X^2 \\
&\leq 2\left(y^\delta - F(x_n^\delta), F'(x_n^\delta)(x_n^\delta - x^\dagger)\right)_Y + \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|_Y^2 \\
&= 2\left(y^\delta - F(x_n^\delta), y^\delta - F(x_n^\delta) + F'(x_n^\delta)(x_n^\delta - x^\dagger)\right)_Y \\
&\qquad - \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|_Y^2 \\
&\leq \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|_Y \big(2\|y^\delta - F(x_n^\delta) + F'(x_n^\delta)(x_n^\delta - x^\dagger)\|_Y \\
&\qquad - \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|_Y\big).
\end{aligned}$$

Einsetzen der produktiven Null $F(x^\dagger) - y$ in der ersten Norm in der Klammer ergibt mit Hilfe der Dreiecksungleichung und (11.7b)

$$\begin{aligned}
\|y^\delta - F(x_n^\delta) + F'(x_n^\delta)(x_n^\delta - x^\dagger)\|_Y &\leq \delta + \|F(x_n^\delta) - F(x^\dagger) - F'(x_n^\delta)(x_n^\delta - x^\dagger)\|_Y \\
&\leq \delta + \eta\|F(x_n^\delta) - F(x^\dagger)\|_Y \\
&\leq (1+\eta)\delta + \eta\|F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y
\end{aligned}$$

und damit

$$\|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|_X^2 - \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X^2 \leq \|y^\delta - F(x_n)^\delta\|_Y \big(2(1+\eta)\delta - (1-2\eta)\|y^\delta - F(x_n^\delta)\|_Y\big). \tag{11.9}$$

Wegen (11.8) ist die Klammer kleiner oder gleich Null, woraus die gewünschte Monotonie folgt. □

Per Induktion folgt daraus $x_n^\delta \in B_{2r}(x_0) \subset U$, solange (11.8) erfüllt ist. Wählen wir τ im Diskrepanzprinzip (11.3) als

$$\tau > 2\frac{1+\eta}{1-2\eta} > 2, \tag{11.10}$$

so ist dies für alle $n \leq N(\delta, y^\delta)$ der Fall. Mit dieser Wahl können wir auch garantieren, dass der Abbruchindex $N(\delta, y^\delta)$ endlich ist.

Satz 11.3. *Es gelten die Annahmen von Lemma 11.2. Wird $N(\delta, y^\delta)$ nach dem Diskrepanzprinzip (11.3) mit τ wie in (11.10) gewählt, so gilt*

$$N(\delta, y^\delta) < C\delta^{-2} \qquad \text{für ein } C > 0. \tag{11.11}$$

Für exakte Daten (d. h. $\delta = 0$) gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|F(x_n) - y\|_Y^2 < \infty. \tag{11.12}$$

Beweis. Wegen $x_0^\delta = x_0 \in B_{2r}(x_0)$ und der Wahl von τ können wir Lemma 11.2 für alle $n < N = N(\delta, y^\delta)$ anwenden. Insbesondere folgt aus (11.9) zusammen mit (11.10)

$$\|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|_X^2 - \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X^2 < \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|_Y^2 \left(\frac{2}{\tau}(1+\eta) + 2\eta - 1\right) \qquad \text{für alle } n < N.$$

Aufsummieren von $n = 0$ bis $N - 1$ ergibt

$$\left(1 - 2\eta - \frac{2}{\tau}(1+\eta)\right) \sum_{n=0}^{N-1} \|F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y^2 < \|x_0 - x^\dagger\|_X^2 - \|x_N^\delta - x^\dagger\|_X^2.$$

Da N nach dem Diskrepanzprinzip gewählt war, gilt $\|F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y > \tau\delta$ für alle $n < N$. Zusammen erhalten wir also

$$N\tau^2\delta^2 < \sum_{n=0}^{N-1} \|F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y^2 < \left(1 - 2\eta - 2\tau^{-1}(1+\eta)\right)^{-1} \|x_0 - x^\dagger\|_X^2$$

und damit (11.11) für $C := \left((1-2\eta)\tau^2 - 2(1+\eta)\tau\right)^{-1} \|x_0 - x^\dagger\|_X^2 > 0$.

Für $\delta = 0$ ist (11.8) für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, und wir erhalten analog zu oben (die Terme mit τ tauchen in dem Fall nicht auf)

$$(1 - 2\eta) \sum_{n=0}^{N-1} \|F(x_n) - y\|_Y^2 \leq \|x_0 - x^\dagger\|_X^2 \qquad \text{für alle } N \in \mathbb{N},$$

woraus durch Grenzübergang $N \to \infty$ die Ungleichung (11.12) folgt. □

Aus (11.12) folgt für exakte Daten $y \in \mathcal{R}(F)$ zwar $F(x_n) \to y$, aber noch nicht die Konvergenz der Iterierten. Diese zeigen wir nun.

Satz 11.4. *Unter den Annahmen von Lemma 11.2 konvergiert $x_n \to \bar{x}$ mit $F(\bar{x}) = y$ für $n \to \infty$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $e_n := x_n - x^\dagger$ eine Cauchy-Folge ist. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$, und wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $m \geq k \geq n$ so, dass gilt

$$\|y - F(x_k)\|_Y \leq \|y - F(x_j)\|_Y \qquad \text{für alle } n \leq j \leq m \tag{11.13}$$

(d. h. dasjenige k, für das das Residuum – welches im nichtlinearen Fall nicht monoton sein muss – sein Minimum annimmt). Wir schreiben nun

$$\|e_m - e_n\|_X \leq \|e_m - e_k\|_X + \|e_k - e_n\|_X$$

und betrachten beide Terme separat. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|e_m - e_k\|_X^2 &= 2\,(e_k - e_m, e_k)_X + \|e_m\|_X^2 - \|e_k\|_X^2,\\
\|e_k - e_n\|_X^2 &= 2\,(e_k - e_n, e_k)_X + \|e_n\|_X^2 - \|e_k\|_X^2.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 11.2 folgt, dass $\|e_n\|_X \geq 0$ monoton fallend ist und daher gegen ein $\varepsilon \geq 0$ konvergiert. Also konvergieren für $n \to \infty$ die beiden Differenzen auf der rechten Seite gegen Null, und wir müssen nur die Skalarprodukte untersuchen. Durch Einsetzen der Definition von e_n, Schreiben als Teleskopsumme, und Verwenden der Iterationsvorschrift (11.6) erhalten wir

$$e_m - e_k = x_m - x_k = \sum_{j=k}^{m-1} x_{j+1} - x_j = \sum_{j=k}^{m-1} F'(x_j)^*(y - F(x_j)).$$

Einsetzen und großzügiges Einfügen der produktiven Null zusammen mit (11.7b) ergibt dann

$$\begin{aligned}
(e_k - e_m, e_k)_X &= \sum_{j=k}^{m-1} -\Big(y - F(x_j), F'(x_j)(x_k - x^\dagger)\Big)_Y \\
&\leq \sum_{j=k}^{m-1} \|y - F(x_j)\|_Y \|F'(x_j)(x_k - x_j + x_j - x^\dagger)\|_Y \\
&\leq \sum_{j=k}^{m-1} \|y - F(x_j)\|_Y \big(\|y - F(x_j) - F'(x_j)(x^\dagger - x_j)\|_Y + \|y - F(x_k)\|_Y \\
&\qquad\qquad + \|F(x_j) - F(x_k) - F'(x_j)(x_j - x_k)\|_Y\big) \\
&\leq (1+\eta) \sum_{j=k}^{m-1} \|y - F(x_j)\|_Y \|y - F(x_k)\|_Y + 2\eta \sum_{j=k}^{m-1} \|y - F(x_j)\|_Y^2 \\
&\leq (1+3\eta) \sum_{j=k}^{m-1} \|y - F(x_j)\|_Y^2,
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die Definition (11.13) von k verwendet haben. Analog folgt

$$(e_k - e_n, e_k)_X \leq (1+3\eta) \sum_{j=n}^{k-1} \|y - F(x_j)\|_Y^2.$$

Wegen (11.12) müssen nun für $n \to \infty$ die beiden Restsummenfolgen gegen Null konvergieren. Also sind $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen, woraus die Konvergenz $x_n \to \bar{x}$ mit $F(\bar{x}) = y$ folgt. □

Es bleibt noch die Konvergenzbedingung (11.2) für gestörte Daten zu zeigen.

Satz 11.5. *Unter den Annahmen von Lemma 11.2 konvergiert $x_{N(\delta,y^\delta)} \to \bar{x}$ mit $F(\bar{x}) = y$ für $\delta \to 0$.*

Beweis. Wir wenden Lemma 11.1 an. Die Bedingung (11.1) haben wir in Satz 11.4 gezeigt. Da F und F' nach Annahme stetig sind, hängt für festes $n \in \mathbb{N}$ die rechte Seite von (11.6) stetig von x_n ab. Für $\delta \to 0$ konvergiert also für alle $k \leq n$ die rechte Seite der Iterationsvorschrift für x_{k+1}^δ gegen diejenige für x_{k+1}, woraus $x_{k+1}^\delta \to x_{k+1}$ für alle $k \leq n$ und damit die Stabilitätsbedingung (11.5) folgt. Die Monotoniebedingung (11.4) erhalten wir schließlich aus Lemma 11.2, woraus (11.2) folgt. □

Unter der bekannten Quellbedingung $x^\dagger - x_0 \in \mathcal{R}(F'(x^\dagger)^*)$ kann man – unter zusätzlichen technischen Annahmen an die Nichtlinearität von F – die zu erwartende Konvergenzrate von $\mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ zeigen, siehe [Hanke u. a. 1995, Theorem 3.2], [Kaltenbacher u. a. 2008, Theorem 2.13].

11.2 LEVENBERG–MARQUARDT-VERFAHREN

Ein Nachteil der Landweber-Iteration ist wie im linearen Fall, dass nach (11.11) mit $N(\delta, y^\delta) = O(\delta^{-2})$ sehr viele Schritte notwendig sein können, bis das Diskrepanzprinzip erfüllt ist. Schnellere Konvergenz können wir von Newton-artigen Verfahren erwarten. Für die ursprüngliche Gleichung $F(x) = y$ besteht ein Schritt im Newton-Verfahren in der Lösung der linearisierten Gleichung

$$F'(x_n)h_n = -(F(x_n) - y) \tag{11.14}$$

und Setzen von $x_{n+1} := x_n + h_n$. Für einen vollstetigen Operator ist allerdings die Fréchet-Ableitung nach Satz 9.4 stets kompakt, und damit ist (11.14) im Allgemeinen selbst ein schlecht gestelltes Problem. Die Idee ist nun, eine Tikhonov-Regularisierung auf den Newton-Schritt (11.14) anzuwenden, d. h. h_n zu berechnen als Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{h\in X} \frac{1}{2}\|F'(x_n)h + F(x_n) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|h\|_X^2 \tag{11.15}$$

für $\alpha_n > 0$ geeignet gewählt. Unter Verwendung von Lemma 6.3 und $h_n = x_{n+1} - x_n$ erhalten wir daraus eine explizite Iterationsvorschrift, die als *Levenberg–Marquardt-Verfahren* bekannt ist:

$$x_{n+1} = x_n + (F'(x_n)^*F'(x_n) + \alpha_n \operatorname{Id})^{-1} F'(x_n)^*(y - F(x_n)). \tag{11.16}$$

Wir zeigen nun wie für die Landweber-Iteration, dass durch (11.16) ein iteratives Regularisierungsverfahren definiert wird. Dazu wählen wir α_n so, dass der entsprechende Minimierer h_{α_n} für ein $\sigma \in (0, 1)$ die Gleichung

$$\|F'(x_n)h_{\alpha_n} + F(x_n) - y\|_Y = \sigma\|F(x_n) - y\|_Y \tag{11.17}$$

erfüllt. Wir zeigen zunächst, dass unter bestimmten Annahmen solch ein α existiert.

Satz 11.6. *Sei $F : U \to Y$ stetig differenzierbar, und für $x_0 \in U$ existiere ein $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset U$ mit $x^\dagger \in B_r(x_0)$. Existiert für $n \in \mathbb{N}$ ein $\gamma > 1$ mit*

$$\|F'(x_n)(x^\dagger - x_n) + F(x_n) - y\|_Y \leq \frac{\sigma}{\gamma}\|F(x_n) - y\|_Y, \tag{11.18}$$

so hat (11.17) eine Lösung $\bar{\alpha} > 0$.

Beweis. Setze $f_n(\alpha) := \|F'(x_n)h_\alpha + F(x_n) - y\|_Y$. Da $F'(x_n)$ linear ist, ist der Minimierer h_α von (11.15) für alle $\alpha > 0$ eindeutig. Wie im Beweis von Satz 10.6 folgt daraus die Stetigkeit von f_n sowie

$$\lim_{\alpha\to\infty} f_n(\alpha) = \|F(x_n) - y\|_Y,$$
$$\lim_{\alpha\to 0} f_n(\alpha) = \inf_{h\in X} \|F'(x_n)h + F(x_n) - y\|_Y \leq \|F'(x_n)(x^\dagger - x_n) + F(x_n) - y\|_Y.$$

Nach Annahme gilt nun

$$\lim_{\alpha\to 0} f_n(\alpha) \le \frac{\sigma}{\gamma}\|F(x_n)-y\|_Y < \sigma\|F(x_n)-y\|_Y < \|F(x_n)-y\|_Y = \lim_{\alpha\to\infty} f_n(\alpha),$$

woraus zusammen mit der Stetigkeit von $f_n(\alpha)$ die Existenz einer Lösung $\bar\alpha > 0$ von $f_n(\alpha) = \sigma\|F(x_n)-y\|_Y$ folgt. □

Mit Hilfe dieser Wahl von α_n können wir wieder die Monotonie des Fehlers zeigen.

Lemma 11.7. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 11.6. Ist $x_n \in B_r(x^\dagger)$, so gilt*

$$\|x_n - x^\dagger\|_X^2 - \|x_{n+1}-x^\dagger\|_X^2 \ge \|x_{n+1}-x_n\|_X^2 + \frac{2(\gamma-1)\sigma^2}{\gamma\alpha_n}\|F(x_n)-y\|_Y^2. \tag{11.19}$$

Insbesondere gilt

$$\|x_{n+1}-x^\dagger\|_X \le \|x_n - x^\dagger\|_X$$

und damit $x_{n+1} \in B_r(x^\dagger) \subset B_{2r}(x_0)$.

Beweis. Wie in Lemma 11.2 verwenden wir die Iterationsvorschrift (11.16), um die Fehlerdifferenz abzuschätzen. Der Übersichtlichkeit halber setzen wir dabei $T_n := F'(x_n)$, $h_n := x_{n+1}-x_n$ und $\tilde y_n := y - F(x_n)$. Wir formen zunächst (11.16) um in $\alpha_n h_n = T_n^*\tilde y_n - T_n^* T_n h_n$, woraus

$$\left(x_{n+1}-x_n, x_n - x^\dagger\right)_X = \alpha_n^{-1}\left(\tilde y_n - T_n h_n, T_n(x_n - x^\dagger)\right)_Y \tag{11.20}$$

und analog

$$(x_{n+1}-x_n, x_{n+1}-x_n)_X = \alpha_n^{-1}(\tilde y_n - T_n h_n, T_n h_n)_Y$$

folgt. Zusammen mit der produktiven Null $\tilde y_n - \tilde y_n$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^\dagger\|_X^2 - \|x_n - x^\dagger\|_X^2 &= 2\left(x_{n+1}-x_n, x_n - x^\dagger\right)_X + \|x_{n+1}-x_n\|_X^2\\
&= 2\alpha_n^{-1}\left(\tilde y_n - T_n h_n, y_n + T_n(x_n - x^\dagger)\right)_Y\\
&\quad + 2\alpha_n^{-1}(\tilde y_n - T_n h_n, T_n h_n - y_n)_Y - \|x_{n+1}-x_n\|_X^2\\
&= 2\alpha_n^{-1}\left(\tilde y_n - T_n h_n, y_n - T_n(x^\dagger - x_n)\right)_Y\\
&\quad - 2\alpha_n^{-1}\|\tilde y_n - T_n h_n\|_Y^2 - \|x_{n+1}-x_n\|_X^2\\
&\le 2\alpha_n^{-1}\|\tilde y_n - T_n h_n\|_Y\|\tilde y_n - T_n(x^\dagger - x_n)\|_Y\\
&\quad - 2\alpha_n^{-1}\|\tilde y_n - T_n h_n\|_Y^2 - \|x_{n+1}-x_n\|_X^2.
\end{aligned}$$

Für die Terme mit h_n können wir direkt die Parameterwahl (11.17) einsetzen. Für den Term mit $x^\dagger$ verwenden wir nun die Annahme (11.18) sowie die Parameterwahl (11.17) und erhalten

$$\|\tilde y_n - T_n(x^\dagger - x_n)\|_Y \le \frac{\sigma}{\gamma}\|\tilde y_n\|_Y = \frac{1}{\gamma}\|\tilde y_n - T_n h_n\|_Y.$$

Zusammen ergibt dies (11.19). □

Als nächstes zeigen wir, dass für gestörte Daten y^δ das Diskrepanzprinzip (11.3) einen endlichen Abbruchindex $N(\delta, y^\delta)$ liefert. Dafür brauchen wir eine schärfere Variante der Tangentialkegelbedingung (11.7b).

Satz 11.8. *Sei $F : U \to Y$ stetig differenzierbar, und für $x_0 \in U$ existiert ein $r > 0$ mit $B_{2r}(x_0) \subset U$, so dass eine Lösung $x^\dagger \in B_r(x_0)$ existiert. Weiter sei $\|F'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$ für $M > 0$ und $x \in B_{2r}(x_0)$, und es existiere ein $c > 0$ so dass für alle $x, \tilde{x} \in B_{2r}(x_0)$ gilt*

$$\|F(x) - F(\tilde{x}) - F'(x)(x - \tilde{x})\|_Y \leq c\|x - \tilde{x}\|_X \|F(x) - F(\tilde{x})\|_Y. \tag{11.21}$$

Wird $N(\delta, y^\delta)$ nach dem Diskrepanzprinzip (11.3) mit $\tau > \sigma^{-1}$ gewählt und ist $\|x_0 - x^\dagger\|_X$ hinreichend klein, so gilt

$$N(\delta, y^\delta) < C(1 + |\log \delta|) \qquad \textit{für ein } C > 0.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass der Fehler bis zum Abbruchindex monoton fallend ist. Angenommen $N = N(\delta, y^\delta) \geq 1$ (sonst ist nichts zu zeigen) und

$$\|x_0 - x^\dagger\|_X \leq \min\{r, \tilde{r}\}, \qquad \tilde{r} := \frac{\sigma\tau - 1}{c(1 + \tau)}.$$

Aus (11.21) mit $x = x_0$ und $\tilde{x} = x^\dagger$ folgt dann durch Einschieben von $y - y$

$$\begin{aligned}
\|F'(x_0)(x^\dagger - x_0) + F(x_0) - y^\delta\|_Y &\leq \delta + \|F(x_0) - y - F'(x_0)(x_0 - x^\dagger)\|_Y \\
&\leq \delta + c\|x_0 - x^\dagger\|_X \|F(x_0) - y\|_Y \\
&\leq (1 + c\|x_0 - x^\dagger\|_X)\delta + c\|x_0 - x^\dagger\|_X \|F(x_0) - y^\delta\|_Y
\end{aligned}$$

und damit (11.18) mit $\gamma = \sigma\tau(1 + c(1 + \tau)\|x_0 - x^\dagger\|_X)^{-1} > 1$. Aus Lemma 11.7 folgt dann

$$\|x_1^\delta - x^\dagger\|_X \leq \|x_0 - x^\dagger\|_X \leq \min\{r, \tilde{r}\},$$

und damit insbesondere $x_1^\delta \in B_{2r}(x_0) \subset U$. Wir erhalten nun wie eben

$$\begin{aligned}
\|F'(x_1^\delta)(x^\dagger - x_1^\delta) + F(x_1^\delta) - y^\delta\|_Y &\leq (1 + c\|x_1^\delta - x^\dagger\|_X)\delta + c\|x_1^\delta - x^\dagger\|_X \|F(x_1^\delta) - y^\delta\|_Y \\
&\leq (1 + c\|x_0 - x^\dagger\|_X)\delta + c\|x_0 - x^\dagger\|_X \|F(x_1^\delta) - y^\delta\|_Y.
\end{aligned}$$

Durch Induktion folgt nun, dass die gesamte Iteration (11.16) wohldefiniert und (11.19) für alle $n < N$ gilt.

Um nun wie für die Landweber-Iteration die Residuen aufsummieren zu können, benötigen wir noch eine uniforme Abschätzung für α_n. Dazu verwenden wir die Identität (mit T_n, h_n^δ und $\tilde{y}_n^\delta$ wie im Beweis von Lemma 11.7)

$$(T_n T_n^* + \alpha_n \operatorname{Id})\left(\tilde{y}_n^\delta - T_n h_n^\delta\right) = T_n\left(T_n^* \tilde{y}_n^\delta - T_n^* T_n h_n^\delta - \alpha_n h_n^\delta\right) + \alpha_n \tilde{y}_n^\delta = \alpha_n \tilde{y}_n^\delta,$$

wobei wir im letzten Schritt die Iterationsvorschrift (11.16) verwendet haben. Wir erhalten daraus mit Hilfe der Annahme $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M$ sowie der Parameterwahlregel (11.17)

$$\begin{aligned}\alpha_n\|\tilde{y}_n^\delta\|_Y &= \|(T_nT_n^* + \alpha_n \operatorname{Id})(\tilde{y}_n^\delta - T_nh_n^\delta)\|_Y\\ &\leq (M^2+\alpha_n)\|\tilde{y}_n^\delta - T_nh_n^\delta\|_Y\\ &= (M^2+\alpha_n)\sigma\|\tilde{y}_n^\delta\|_Y.\end{aligned} \tag{11.22}$$

Auflösen von (11.22) nach α_n ergibt dann $\alpha_n \leq \frac{\sigma M^2}{1-\sigma}$, woraus mit (11.19) folgt

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X^2 - \|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|_X^2 \geq \frac{2(\gamma-1)(1-\sigma)\sigma}{\gamma M^2}\|F(x_n^\delta)-y\|_Y^2 \qquad \text{für alle } n < N.$$

Da N nach dem Diskrepanzprinzip (11.3) gewählt war, erhalten wir durch Aufsummieren von $n = 0$ bis $N-1$ die Abschätzung

$$N(\tau\delta)^2 \leq \sum_{n=0}^{N-1}\|F(x_n^\delta)-y\|_Y^2 \leq \frac{\gamma M^2}{2(\gamma-1)(1-\sigma)\sigma}\|x_0 - x^\dagger\|_X.$$

Damit ist N für alle $\delta > 0$ endlich.

Um die logarithmische Abschätzung zu zeigen, verwenden wir die Parameterwahlregel (11.17) sowie die Bedingung (11.21) und erhalten für beliebige $n < N$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sigma\|F(x_n^\delta)-y^\delta\|_Y &= \|F'(x_n^\delta)h_n^\delta + F(x_n^\delta) - y^\delta\|_Y\\ &\geq \|F(x_{n+1}^\delta)-y^\delta\|_Y - \|F'(x_n^\delta)h_n^\delta + F(x_n^\delta) - F(x_{n+1}^\delta)\|_Y\\ &\geq \|F(x_{n+1}^\delta)-y^\delta\|_Y - c\|h_n^\delta\|_X\|F(x_{n+1}^\delta)-F(x_n^\delta)\|_Y\\ &\geq (1-c\|h_n^\delta\|_X)\|F(x_{n+1}^\delta)-y^\delta\|_Y - c\|h_n^\delta\|_X\|F(x_n^\delta)-y^\delta\|_Y.\end{aligned}$$

Aus (11.19) folgt nun

$$\|h_n^\delta\|_X \leq \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X \leq \|x_0 - x^\dagger\|_X,$$

und zusammen mit dem Diskrepanzprinzip erhalten wir für $n = N-1$

$$\begin{aligned}\tau\delta \leq \|F(x_{N-1}^\delta)-y^\delta\|_Y &\leq \frac{\sigma + c\|x_0-x^\dagger\|_X}{1-c\|x_0-x^\dagger\|_X}\|F(x_{N-2}^\delta)-y^\delta\|_Y\\ &\leq \left(\frac{\sigma + c\|x_0-x^\dagger\|_X}{1-c\|x_0-x^\dagger\|_X}\right)^{N-1}\|F(x_0)-y^\delta\|_Y.\end{aligned}$$

Für $\|x_0 - x^\dagger\|_X$ klein genug ist der Bruch auf der rechten Seite kleiner als 1, woraus die gesuchte Abschätzung für N folgt. □

Für kleinen Fehler δ liefert $O(1+|\log\delta|)$ eine wesentlich kleinere Schranke als $O(\delta^{-2})$ (bei vergleichbaren Konstanten, wovon allerdings in der Regel nicht auszugehen ist), woraus die schnellere Konvergenz des Levenberg–Marquardt-Verfahrens im Vergleich zur Landweber-Iteration ersichtlich wird. Dafür sind die einzelnen Iterationen jedoch aufwendiger, da (nach Diskretisierung) jedesmal ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Welches der beiden Verfahren in der Praxis das schnellere ist (gemessen an der benötigten Rechenzeit), hängt daher vom konkreten Problem ab.

Wir betrachten nun die (lokale) Konvergenz für exakte Daten.

Satz 11.9. *Es gelten die Annahmen von Satz 11.8. Ist $\|x_0-x^\dagger\|_X$ hinreichend klein, so konvergiert $x_n \to \bar x$ mit $F(\bar x) = y$ für $n\to\infty$.*

Beweis. Aus (11.21) für $x = x_0$ und $\tilde x = x^\dagger$ folgt direkt

$$\|F(x_0) - y - F'(x_0)(x_0 - x^\dagger)\|_Y \le c\|x_0 - x^\dagger\|_X\|F(x_0) - y\|_Y.$$

Für $\|x_0 - x^\dagger\|_X$ hinreichend klein ist dann $\gamma := \sigma(c\|x_0 - x^\dagger\|_X)^{-1} > 1$ und damit (11.18) erfüllt. Wir können daher Lemma 11.7 anwenden und erhalten $\|x_1 - x^\dagger\|_X \le \|x_0 - x^\dagger\|_X$. Also ist $x_1 \in B_{2r}(x_0)$ und auch $\|x_1 - x^\dagger\|_X$ hinreichend klein, so dass durch Induktion die Wohldefiniertheit der Iterationsvorschrift und die Monotonie des Fehlers für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt. Genau wie im Beweis von Satz 11.8 erhalten wir daraus durch Umformen und Aufsummieren

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|F(x_n) - y\|_Y^2 \le \frac{\gamma M^2}{2(\gamma-1)(1-\sigma)\sigma}\|x_0 - x^\dagger\|_X < \infty$$

und damit $F(x_n)\to y$ für $n\to\infty$.

Der Rest des Beweises verläuft analog zum Beweis von Satz 11.4. Wir setzen $e_n := x_n - x^\dagger$ und betrachten

$$\|e_m - e_n\|_X \le \|e_m - e_k\|_X + \|e_k - e_n\|_X,$$

wobei $m\ge n$ beliebig und $k\in\{n,\dots,m\}$ nach (11.13) gewählt sind. Aus der Monotonie folgt wieder $\|e_n\|_X \to \varepsilon$ für $n\to\infty$ und ein $\varepsilon\ge 0$; wir müssen also nur noch die gemischten Terme betrachten. Mit Hilfe der Identität (11.20) und der Parameterwahl (11.17) erhalten wir

$$\begin{aligned}
(e_k - e_m, e_k)_X &= \sum_{j=k}^{m-1} -\left(x_{j+1} - x_j, x_k - x^\dagger\right)_X\\
&= \sum_{j=k}^{m-1} -\alpha_j^{-1}\left(y - F(x_j) - F'(x_j)(x_{j+1} - x_j), F'(x_j)(x_k - x^\dagger)\right)_Y\\
&\le \sum_{j=k}^{m-1} \alpha_j^{-1}\|y - F(x_j) - F'(x_j)(x_{j+1} - x_j)\|_Y\|F'(x_j)(x_k - x^\dagger)\|_Y\\
&= \sum_{j=k}^{m-1} \sigma\alpha_j^{-1}\|F(x_j) - y\|_Y\|F'(x_j)(x_k - x^\dagger)\|_Y.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term verwenden wir (11.21) und setzen $\eta := c\|x_0 - x^\dagger\|_X \geq c\|x_j - x^\dagger\|_X$ für alle $j \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\|F'(x_j)(x_k - x^\dagger)\|_Y &\leq \|F(x_k) - y\|_Y + \|y - F(x_j) - F'(x_j)(x^\dagger - x_j)\|_Y \\
&\qquad + \|F(x_j) - F(x_k) - F'(x_j)(x_j - x_k)\|_Y \\
&\leq \|F(x_k) - y\|_Y + c\|x_j - x^\dagger\|_X\|F(x_j) - y\|_Y \\
&\qquad + c\|x_j - x_k\|_X\|F(x_j) - F(x_k)\|_Y \\
&\leq (1 + 5\eta)\|F(x_j) - y\|_Y,
\end{aligned}$$

wobei wir wieder die produktive Null und (11.13) ausgenutzt haben.

Wir können nun (11.19) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
(e_k - e_m, e_k)_X &\leq \sum_{j=k}^{m-1}(1 + 5\eta)\sigma\alpha_j^{-1}\|F(x_j) - y\|_Y^2 \\
&\leq \sum_{j=k}^{m-1}\frac{\gamma(1 + 5\eta)}{2\sigma(\gamma - 1)}\left(\|e_j\|_X^2 - \|e_{j+1}\|_X^2\right) \\
&= \frac{\gamma(1 + 5\eta)}{2\sigma(\gamma - 1)}\left(\|e_k\|_X^2 - \|e_m\|_X^2\right) \to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$ wegen der Konvergenz von $\|e_n\|_X \to \varepsilon$. Analog zeigt man

$$(e_k - e_n, e_k)_X \leq \frac{\gamma(1 + 5\eta)}{2\sigma(\gamma - 1)}\left(\|e_n\|_X^2 - \|e_k\|_X^2\right) \to 0$$

für $n \to \infty$, woraus wieder folgt, dass $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und damit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Wegen $F(x_n) \to y$ folgt daraus die Behauptung. □

Wir haben nun fast alles beisammen, um mit Lemma 11.1 die Konvergenz des Levenberg–Marquardt-Verfahrens für gestörte Daten $y^\dagger \in Y$ zu zeigen.

Satz 11.10. *Es gelten die Annahmen von Satz 11.8. Ist $\|x_0 - x^\dagger\|_X$ hinreichend klein, so konvergiert $x^\delta_{N(\delta,y^\delta)} \to \bar{x}$ mit $F(\bar{x}) = y$ für $\delta \to 0$.*

Beweis. Es bleibt nur noch die Stetigkeitsbedingung (11.5) nachzuweisen. Da F stetig differenzierbar angenommen war, ist $F'(x^\dagger)^*F'(x^\dagger) + \alpha\,\mathrm{Id}$ stetig. Nach dem Satz über inverse Funktionen (siehe z. B. [Růžička 2004, Satz 2.17]) ist daher auch $(F'(x)^*F'(x) + \alpha\,\mathrm{Id})^{-1}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung um $x^\dagger$ stetig. Also hängt für festes $n \in \mathbb{N}$ die rechte Seite von (11.16) stetig von x_n ab, woraus analog zur Landweber-Iteration die Bedingung (11.5) und damit die behauptete Konvergenz folgt. □

Zusammen mit einer Quellbedingung kann man für eine geeignete a priori Wahl von α_n und $N = N(\delta)$ auch (logarithmische) Konvergenzraten für $\delta \to 0$ zeigen; siehe z. B. [Kaltenbacher u. a. 2008, Theorem 4.7].

11.3 ITERATIV REGULARISIERTES GAUSS–NEWTON-VERFAHREN

Wir betrachten nun eine Variante des Levenberg–Marquardt-Verfahrens, die von Bakushinskiĭ vorgeschlagen wurde: Setze $x_{n+1} = x_n + h_n$, wobei h_n Lösung ist des Minimierungsproblems

$$\min_{h\in X} \frac{1}{2}\|F'(x_n)h + F(x_n) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|h + x_n - x_0\|_X^2. \tag{11.23}$$

Mit Hilfe der Normalengleichungen erhält man daraus die Iterationsvorschrift des *iterativ regularisierten Gauß–Newton-Verfahrens*:

$$x_{n+1} = x_n + \left(F'(x_n)^*F'(x_n) + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1} \left(F'(x_n)^*(y - F(x_n)) + \alpha_n(x_0 - x_n)\right). \tag{11.24}$$

Die Iteration unterscheidet sich vom Levenberg–Marquardt-Verfahren also nur in einem zusätzlichen Term auf der rechten Seite. Im Gegensatz zu (11.15) steht in (11.23) jedoch $x_n + h_n - x_0 = x_{n+1} - x_0$ im Regularisierungsterm. Dadurch kann man x_{n+1} selber auffassen als Minimierer des linearisierten Tikhonov-Funktionals

$$\min_{x\in X} \frac{1}{2}\|F'(x_n)(x - x_n) + F(x_n) - y\|_Y^2 + \frac{\alpha_n}{2}\|x - x_0\|_X^2,$$

was es ermöglicht, für die Analysis die Eigenschaften der linearen Tikhonov-Regularisierung heranzuziehen. In der Praxis zeichnet sich das Verfahren auch durch eine bessere Stabilität aus, da die explizite Regularisierung von x_{n+1} verhindert, dass zwar die Inkremente h_n beschränkt bleiben, sich im Laufe der Iteration jedoch unbeschränkt aufsummieren.

Ähnlich wie für das Levenberg–Marquardt-Verfahren kann man nun (unter Nichtlinearitätsbedingungen) Wohldefiniertheit und Konvergenz für exakte und gestörte Daten zeigen; siehe z. B. [Kaltenbacher u. a. 2008, Kapitel 4.2]. Wir wollen hier stattdessen nur Konvergenzraten in Verbindung mit einer a priori-Wahlregel herleiten. Wir nehmen dafür an, dass $F : U \to Y$ stetig Fréchet-differenzierbar ist. Um wie angekündigt die Resultate für lineare Tikhonov-Regularisierung anwenden zu können, nehmen wir weiter an, dass F vollstetig und daher $F'(x)$ nach Satz 9.4 für alle $x \in U$ kompakt ist.

Wir zeigen zuerst, dass der Fehler eine quadratische Rekursion erfüllt.

Lemma 11.11. *Sei $F : U \to Y$ stetig differenzierbar und vollstetig, und sei $x^\dagger$ eine x_0-Minimum-Norm-Lösung. Weiter seien erfüllt:*

(i) es gibt ein $w \in X$ mit $x^\dagger - x_0 = |F'(x^\dagger)|^\nu w$ und $\|w\|_X \le \rho$ für ein $\nu \in [1, 2]$ und $\rho > 0$;

(ii) F' ist Lipschitz-stetig mit Konstante L.

Wird der Abbruchindex $N = N(\delta)$ so gewählt, dass für ein $\tau > 0$ gilt

$$\alpha_N^{(\nu+1)/2} \le \tau\delta \le \alpha_n^{(\nu+1)/2} \qquad \textit{für alle } n < N, \tag{11.25}$$

so ist für alle $n < N$

$$\|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|_X \leq \left(C_\nu\rho + \tau^{-1}\right)\alpha_n^{\nu/2} + L\rho\left(C_\nu\alpha_n^{(\nu-1)/2} + \|F'(x^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^{\nu-1}\right)\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X + \frac{L}{2\alpha_n^{1/2}}\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X^2.$$

Beweis. Wir spalten den Fehler $x_{n+1} - x^\dagger$ mit Hilfe der Iterationsvorschrift und einigen Umformungen auf in drei Komponenten, die wir separat abschätzen. Wir setzen $K_n := F'(x_n^\delta)$ und $K := F'(x^\dagger)$ und schreiben

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^\delta - x^\dagger &= x_n^\delta - x^\dagger + \left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}\left(K_n^*(y^\delta - F(x_n^\delta)) + \alpha_n(x_0 - x_n^\delta)\right)\\
&= \left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}\left(\alpha_n(x_0 - x^\dagger) + K_n^*\left(y^\delta - F(x_n^\delta) + K_n(x_n^\delta - x^\dagger)\right)\right)\\
&= \left[\alpha_n\left(K^*K + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}(x_0 - x^\dagger)\right] + \left[\left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}K_n^*(y^\delta - y)\right]\\
&\quad + \Big[\left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}K_n^*\left(F(x^\dagger) - F(x_n^\delta) + K_n(x_n^\delta - x^\dagger)\right)\\
&\qquad + \alpha_n\left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}(K_n^*K_n - K^*K)\left(K^*K + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}(x_0 - x^\dagger)\Big]\\
&=: e^1 + e^2 + e^3.
\end{aligned}$$

Wir schätzen zuerst den Approximationsfehler e_1 ab. Da K kompakt ist, können wir nach Lemma 6.3 die Spektraldarstellung $(K^*K + \alpha \operatorname{Id})^{-1}x = \varphi_\alpha(K^*K)x$ für $\varphi_\alpha(\lambda) = (\lambda + \alpha)^{-1}$ anwenden. Zusammen mit der Quelldarstellung folgt daraus für alle $\nu \leq \nu_0 = 2$

$$\begin{aligned}
\|e_1\|_X &= \|\alpha_n\left(K^*K + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}(x_0 - x^\dagger)\|_X\\
&= \|\alpha_n\varphi_{\alpha_n}(K^*K)(K^*K)^{\nu/2}w\|_X\\
&\leq \sup_{\lambda\in(0,\kappa]}\frac{\alpha_n\lambda^{\nu/2}}{\lambda + \alpha_n}\|w\|_X = \sup_{\lambda\in(0,\kappa]}\omega_\nu(\alpha_n)\|w\|_X\\
&\leq C_\nu\alpha_n^{\nu/2}\rho
\end{aligned}$$

wie in Kapitel 6 gezeigt.

Für den Datenfehler e_2 verwenden wir ebenfalls die Abschätzungen aus Kapitel 6 zusammen mit der a priori-Wahl von α_n und erhalten für alle $n < N$

$$\begin{aligned}
\|e_2\|_X &= \|\left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1}K_n^*(y^\delta - y)\|_X\\
&\leq \|\varphi_{\alpha_n}(K_n^*K_n)K_n^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|y^\delta - y\|_Y\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\delta \leq \tau^{-1}\alpha_n^{\nu/2}.
\end{aligned}$$

Den Nichtlinearitätsfehler e_3 spalten wir wiederum in zwei Teile auf, die wir separat abschätzen. Für den ersten Teil verwenden wir die Lipschitzbedingung und Lemma 9.6 und erhalten

$$\begin{aligned}\|e_{3a}\|_X &:= \| \left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1} K_n^* \left(F(x^\dagger) - F(x_n^\delta) + K_n(x_n^\delta - x^\dagger)\right) \|_X \\ &\leq \|\varphi_{\alpha_n}(K_n^*K_n)K_n^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|F(x^\dagger) - F(x_n^\delta) - K_n(x^\dagger - x_n^\delta)\|_Y \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \frac{L}{2} \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X^2.\end{aligned}$$

Für den zweiten Teil verwenden wir die Identität

$$K_n^*K_n - K^*K = K_n^*(K_n - K) + (K_n^* - K^*)K$$

sowie die Lipschitz-Stetigkeit und Quellbedingung, und schätzen analog zu oben ab

$$\begin{aligned}\|e_{3b}\|_X &:= \|\alpha_n \left(K_n^*K_n + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1} (K_n^*K_n - K^*K) \left(K^*K + \alpha_n \operatorname{Id}\right)^{-1} (x_0 - x^\dagger)\|_X \\ &\leq \|\varphi_{\alpha_n}(K_n^*K_n)K_n^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K - K_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|\alpha_n \varphi_{\alpha_n}(K^*K)(K^*K)^{\nu/2} w\|_X \\ &\quad + \|\alpha_n \varphi_{\alpha_n}(K_n^*K_n)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K_n - K\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|K\varphi_{\alpha_n}(K^*K)(K^*K)^{1/2}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \\ &\qquad \cdot \|(K^*K)^{(\nu-1)/2} w\|_X \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} L\|x^\dagger - x_n^\delta\|_X \, C_\nu \alpha_n^{\nu/2} \rho + \sup_{\lambda \in (0,\kappa]} \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \lambda} L\|x_n^\delta - x^\dagger\| \, \|K\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^{\nu-1} \rho \\ &\leq L\rho \left(C_\nu \alpha_n^{(\nu-1)/2} + \|K\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^{\nu-1}\right) \|x_n^\delta - x^\dagger\|_X,\end{aligned}$$

wobei wir $\|K^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} = \|K\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ und – mit Hilfe von Lemma 3.12 (iii) – die Abschätzung

$$\|K\varphi_\alpha(K^*K)(K^*K)^{1/2}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|(K^*K)^{1/2}\varphi_\alpha(K^*K)(K^*K)^{1/2}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \sup_{\lambda \in (0,\kappa]} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \leq 1$$

verwendet haben. Zusammen ergibt dies die gewünschte Abschätzung. □

Ist der Anfangsfehler klein genug, folgt daraus die gewünschte Fehlerabschätzung.

Satz 11.12. *Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 11.11 für $\rho > 0$ hinreichend klein und $\tau > 0$ hinreichend groß. Es sei weiterhin $\alpha_0 \leq 1$ und*

$$1 < \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \leq q \qquad \text{für ein } q > 1.$$

Dann gilt für exakte Daten (d. h. $\delta = 0$)

$$\|x_n - x^\dagger\|_X \leq c_1 \alpha_n^{\nu/2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{11.26}$$

und für gestörte Daten

$$\|x_{N(\delta)}^\delta - x^\dagger\|_X \leq c_2 \delta^{\frac{\nu}{\nu+1}} \qquad \text{für } \delta \to 0. \tag{11.27}$$

Beweis. Aus Lemma 11.11 folgt, dass $\xi_n := \alpha_n^{-\nu/2}\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X$ die quadratische Rekursion

$$\xi_{n+1} \leq a + b\xi_n + c\xi_n^2$$

mit

$$a := q^{\nu/2}(C_\nu\rho + \tau^{-1}), \qquad b := q^{\nu/2}L\rho\left(C_\nu + \|F'(x^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^{\nu-1}\right), \qquad c := q^{\nu/2}\frac{L}{2}\rho$$

erfüllt, wobei wir $\nu \geq 1$ und damit $\alpha_n^{-1/2} \leq \alpha_n^{-\nu/2}$ sowie $\alpha_n^{\nu/2} < \alpha_0^{\nu/2} \leq 1$ verwendet haben. Offensichtlich können wir a, b und c beliebig klein machen, indem wir ρ hinreichend klein und τ hinreichend groß wählen. Seien nun t_1, t_2 die Lösungen der Fixpunktgleichung $a + bt + ct^2 = t$, nämlich

$$t_1 = \frac{2a}{1 - b + \sqrt{(1-b)^2 - 4ac}}, \qquad t_2 = \frac{1 - b + \sqrt{(1-b)^2 - 4ac}}{2c}.$$

Für c hinreichend klein ist t_2 beliebig groß; insbesondere können wir annehmen, dass

$$t_2 \geq \xi_0 \tag{11.28}$$

gilt. Aufgrund der Quellbedingung können wir wegen $\|x_0 - x^\dagger\|_X \leq \|F'(x^\dagger)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^\nu\rho$ außerdem durch ρ hinreichend klein auch $x_0 \in B_r(x^\dagger) \subset U$ für ein $r > 0$ garantieren.

Wir zeigen nun durch Induktion, dass für alle $n \leq N = N(\delta)$ gilt

$$\xi_n \leq \max\{t_1, \xi_0\} =: C_\xi. \tag{11.29}$$

Für $n = 0$ folgt diese Aussage direkt aus der Definition; sie gelte daher nun für ein beliebiges $n < N$. Dann gilt insbesondere $\xi_n \leq \xi_0$, und aus der Definition von ξ_n zusammen mit $\alpha_n \leq \alpha_0 \leq 1$ und $\nu \geq 1$ folgt daraus

$$\|x_n^\delta - x^\dagger\|_X \leq \alpha_n^{\nu/2}\alpha_0^{-\nu/2}\|x_0 - x^\dagger\|_X \leq r$$

und damit $x_n^\delta \in B_r(x^\dagger) \subset U$. Die Iteration (11.24) ist daher wohldefiniert, und wir können in der Tat Lemma 11.11 anwenden. Wir unterscheiden nun zwei Fälle in (11.29).

(i) $\xi_n \leq t_1$: Dann gilt wegen $a, b, c \geq 0$ und der Definition von t_1

$$\xi_{n+1} \leq a + b\xi_n + c\xi_n^2 \leq a + bt_1 + bt_1^2 = t_1.$$

(ii) $t_1 < \xi_n \leq \xi_0$: Nach Annahme (11.28) gilt dann $\xi_n \in (t_1, t_2]$, und aus $a + (b-1)t + ct^2 \leq 0$ für $t \in [t_1, t_2]$ wegen $c \geq 0$ folgt damit

$$\xi_{n+1} \leq a + b\xi_n + c\xi_n^2 \leq \xi_n \leq \xi_0.$$

In beiden Fällen erhalten wir also (11.29) für $n + 1$.

Aus (11.29) folgt nun für $\delta = 0$ wegen $N = \infty$

$$\|x_n - x^\dagger\|_X \leq \alpha_n^{\nu/2} C_\xi \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und damit (11.26) mit $c_1 := C_\xi$. Für $\delta > 0$ folgt aus (11.29) für $n = N$ zusammen mit der Parameterwahl (11.25)

$$\|x_N - x^\dagger\|_X \leq \alpha_N^{\nu/2} C_\xi \leq (\tau\delta)^{\frac{\nu}{\nu+1}} C_\xi$$

und damit (11.27) mit $c_2 := C_\xi \tau^{\frac{\nu}{\nu+1}}$. □

Auf ähnliche Weise (wenn auch mit etwas mehr Aufwand) lassen sich auch Konvergenzraten für das Diskrepanzprinzip bis zur Saturation $\nu_0 - 1 = 1$ herleiten; siehe [Kaltenbacher u. a. 2008, Theorem 4.13].

LITERATUR

H. W. Alt (2012), *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*. 6. Aufl., Springer-Verlag, doi: 10.1007/978-3-642-22261-0.

R. Andreev u. a. (2015), Generalized convergence rates results for linear inverse problems in Hilbert spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 36(5), 549–566, doi: 10.1080/01630563.2015.1021422.

A. B. Bakushinskiĭ (1985), Remarks on choosing a regularization parameter using the quasioptimality and ratio criterion, *USSR Comput. Math. Math. Phys.* 24(4), 181–182, doi: 10.1016/0041-5553(84)90253-2.

F. Bauer & M. A. Lukas (2011), Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems, *Mathematics and Computers in Simulation* 81(9), 1795–1841, doi: 10.1016/j.matcom.2011.01.016.

M. Burger (2007), Inverse Problems, Vorlesungsskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Münster, url: http://wwwmath.uni-muenster.de/num/Vorlesungen/IP_WS07/skript.pdf.

C. Clason (2015), Funktionalanalysis I, Vorlesungsskript, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, url: https://www.uni-due.de/~adf040p/skripte/FunktAnSkript15.pdf.

N. Du (2008), Finite-dimensional approximation settings for infinite-dimensional Moore–Penrose inverses, *SIAM J. Numer. Anal.* 46(3), 1454–1482, doi: 10.1137/060661120.

H. W. Engl, M. Hanke & A. Neubauer (1996), *Regularization of Inverse Problems*, Bd. 375, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, doi: 10.1007/978-94-009-1740-8.

H. W. Engl, K. Kunisch & A. Neubauer (1989), Convergence rates for Tikhonov regularisation of nonlinear ill-posed problems, *Inverse Problems* 5(4), 523–540, doi: 10.1088/0266-5611/5/4/007.

M. Hanke, A. Neubauer & O. Scherzer (1995), A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems, *Numerische Mathematik* 72(1), 21–37, doi: 10.1007/s002110050158.

E. Hewitt & K. Stromberg (1975), *Real and Abstract Analysis*, New York & Heidelberg: Springer-Verlag, doi: 10.1007/978-3-662-29794-0.

B. Hofmann u. a. (2007), A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators, *Inverse Problems* 23(3), 987–1010, doi: 10.1088/0266-5611/23/3/009.

T. Hohage (2000), Regularization of exponentially ill-posed problems, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 21(3-4), 439–464, doi: 10.1080/01630560008816965.

T. Hohage (2002), Inverse Problems, Vorlesungsskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen.

K. Ito & B. Jin (2014), *Inverse Problems: Tikhonov Theory and Algorithms*, Bd. 22, Series on Applied Mathematics, Singapore: World Scientific, doi: 10.1142/9789814596206_0001.

W. Kaballo (2011), *Grundkurs Funktionalanalysis*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, doi: 10.1007/978-3-8274-2721-2.

B. Kaltenbacher, A. Neubauer & O. Scherzer (2008), *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems*, Bd. 6, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, Berlin: De Gruyter, doi: 10.1515/9783110208276.

S. Kindermann (2011), Convergence analysis of minimization-based noise level-free parameter choice rules for linear ill-posed problems, *Electron. Trans. Numer. Anal.* 38, 233–257, url: http://etna.mcs.kent.edu/volumes/2011-2020/vol38/abstract.php?vol=38&pages=233-257.

S. Kindermann (2016), Projection methods for ill-posed problems revisited, *Comput. Methods Appl. Math.* 16(2), 257–276, doi: 10.1515/cmam-2015-0036.

A. Kirsch (2011), *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, 2. Aufl., Springer, New York, doi: 10.1007/978-1-4419-8474-6.

L. Landweber (1951), An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind, *Amer. J. Math.* 73, 615–624, doi: 10.2307/2372313.

A. K. Louis (1989), *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner Studienbücher Mathematik, B. G. Teubner, Stuttgart, doi: 10.1007/978-3-322-84808-6.

A. Rieder (2003), *Keine Probleme mit inversen Problemen*, Eine Einführung in ihre stabile Lösung, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, doi: 10.1007/978-3-322-80234-7.

M. Růžička (2004), *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Berlin: Springer, doi: 10.1007/3-540-35022-5.

O. Scherzer u. a. (2009), *Variational Methods in Imaging*, Bd. 167, Applied Mathematical Sciences, New York: Springer, doi: 10.1007/978-0-387-69277-7.

T. Schuster u. a. (2012), *Regularization methods in Banach spaces*, Bd. 10, Radon Series on Computational and Applied Mathematics, Berlin: De Gruyter, doi: 10.1515/9783110255720.

A. N. Tikhonov (1963a), On the regularization of ill-posed problems, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 153, 49–52.

A. N. Tikhonov (1963b), On the solution of ill-posed problems and the method of regularization, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 151, 501–504.

B. von Harrach (2014), Regularisierung Inverser Probleme, Vorlesungsskript, Fachbereich Mathematik, Universität Stuttgart, url: http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/~harrach/lehre/Regularisierung.pdf.

D. Werner (2011), *Funktionalanalysis*, 7. Aufl., Berlin: Springer-Verlag, doi: 10.1007/978-3-642-21017-4.