Die Fachgruppe *Inverse Probleme* stellt sich vor

Christian Clason, Thorsten Hohage und Thomas Schuster

Inverse Probleme

Was sind "inverse Probleme"? Wie viele gute Fragen hat auch diese mehrere richtige Antworten. Ein Blickwinkel beginnt bei einem wohlverstandenen Problem und vertauscht dann Eingabe und Ausgabe: So wird aus dem "direkten" Problem der Matrix-Vektor-Multiplikation das "inverse" Problem der Lösung von linearen Gleichungssystemen; analog wird aus der Lösung von Differentialgleichungen zu gegebenen Anfangswerten und Koeffizienten die Bestimmung von Anfangswerten oder Koeffizienten aus (partieller) Information über die Lösung. Die wesentliche Fragestellung hier ist dann, ob das inverse Problem ähnliche Eigenschaften hat wie das direkte: Existiert immer eine Lösung und ist diese eindeutig? Wenn ja, hängt sie stetig von den (jetzt Eingabe-)Daten ab? Diese Definition (die auf Joe Keller [14] zurückgeht) ist noch völlig symmetrisch; welches Problem das direkte und welches das inverse ist, scheint willkürlich und bestenfalls historisch.

Ein anderer Blickwinkel zeigt den Symmetriebruch: Oft ist es eben nicht so, dass das inverse Problem die genannten Eigenschaften des direkten Problems besitzt: es ist – nach Hadamard [9] und Courant [6, Kap. III.7.2] – "schlecht gestellt" in dem Sinne, dass die Lösung nicht stetig von den Daten abhängt. Bei Operatorgleichungen in unendlichdimensionalen Banachräumen ist dies z. B. der Fall, wenn der Operator kompakt ist; und für viele zeitabhängige Differentialgleichungen kann man leicht Lösungen konstruieren, die nach endlicher Zeit beliebig ähnlich sind, obwohl die zugehörigen Anfangswerte sehr verschieden sind.

Sind gemessene Daten eines schlecht gestellten inversen Problems – wie in der Praxis unvermeidlich – mit Fehlern behaftet, stellt eine stabile und genaue Approximation der Lösung eine erhebliche Herausforderung dar. Dies führt auf einen weiteren Blickwinkel: Viele inverse Probleme kommen aus konkreten Anwendungen wie zum Beispiel der Computertomographie (CT), der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung, der Untersuchung des Aufbaus des Erdkerns, oder der Volatilitätsschätzung in der Finanzwirtschaft – eben überall dort, wo interessante Daten nicht direkt sondern nur über den Abgleich mit indirekten Messungen zugänglich sind.

Regularisierungstheorie. Ist nun ein Problem schlecht gestellt, dann kann keine mathematische Trickserei daran etwas ändern. Man muss daher versuchen, das instabile Problem durch ein stabiles ("korrekt gestelltes") Problem

zu approximieren; in der frequentistischen Statistik und in der numerischen Analysis spricht man von "Regularisierung". Dabei muss man auf (oft qualitative) a priori-Informationen zurückgreifen, die in vielen Fällen durch einen Bayesschen Ansatz motiviert sind. Je nachdem, wie Datenfehler und a priori-Informationen modelliert werden, ergeben sich unterschiedliche Fragen hinsichtlich der "Fehler" und "Konvergenz" der entsprechenden Verfahren, die in den letzten Jahrzehnten ausführlich untersucht wurden, siehe z. B. [4, 7, 11, 12, 15, 17, 20, 22, 23, 25].

Inverse Probleme für partielle Differentialgleichungen. In der zerstörungsfreien Materialprüfung, der medizinischen Bildgebung und anderen Anwendungen stehen oft nur Randdaten von Lösungen partieller Differentialgleichungen zur Verfügung; man interessiert sich jedoch für Koeffizienten der Differentialgleichung im Inneren des untersuchten Objekts. Für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschreibt der *Dirichlet-to-Neumann (DtN) Operator*, der Funktionswerte auf Normalableitungen abbildet, alle prinzipiell durch Randmessungen bestimmbaren Informationen. In einem einflussreichen Artikel [3] formulierte Alberto Calderón – motiviert durch geophysikalische Untersuchungen während seiner früheren Tätigkeit in der Ölindustrie – die Frage, ob die elektrische Leitfähigkeit $\gamma = \gamma(x)$ in der Differentialgleichung $\operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} u) = 0$ eindeutig durch den DtN-Operator bestimmt ist. Gleichzeitig gab er eine positive Antwort für das linearisierte Problem. Sein Lösungsansatz konnte zu positiven Antworten und sogar numerischen Algorithmen für das nichtlineare Problem erweitert werden und führte später zu entsprechenden Resultaten für eng verwandte inverse Streuprobleme (siehe z. B. [2, 5, 18, 21, 27, 29]). Neueste Entwicklungen betreffen unter anderem nichtlineare [16] und fraktionale Differentialgleichungen [8].

Integralgeometrie. Eine weitere Klasse inverser Probleme besteht aus der Rekonstruktion von Größen aus Daten, welche Integralwerte einer gesuchten Funktion über Kurven oder Flächen darstellen; in diese Kategorie fallen viele tomographische Bildgebungsverfahren. Das bekannteste unter ihnen stellt sicherlich die CT dar, die heutzutage eine Standardmethode der medizinischen Diagnostik und der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung ist: Das zu untersuchende Objekt (Patient oder Werkstück) wird aus verschiedenen Richtungen mit Röntgenstrahlen durchleuchtet, um aus der (richtungsabhängigen) Abminderung dieser Strahlen am Detektor auf den Absorptionskoeffizienten zu schließen. In der klinischen Nutzung zum Beispiel steht der Absorptionskoeffizient in direktem Zusammenhang mit der Gewebedichte. Das mathematische Modell stellt die gemessenen Röntgen-Intensitäten als Linienintegrale über den Absorptionskoeffizienten dar, wobei die Linien die Röntgenstrahlen beim Durchwandern des Körpers repräsentieren. In zwei Dimensionen heißt diese Integraltransformation *Radon-Transformation*, in drei Dimensionen *Röntgen-Transformation*. Beide Transformationen haben gemeinsam, dass ihre inversen Abbildungen nicht stetig und die inver-

sen Probleme somit schlecht gestellt sind. Notwendig für eine stabile Inversion sind daher auch hier Regularisierungsverfahren, die z. B. durch Tiefpassfilter (*filtered backprojection*) den Einfluss der Messfehler unterdrücken. Erst solche ausgeklügelten und effizienten Regularisierungsverfahren für die Radon-Transformation verhalfen der CT zu ihrem Einsatz in Klinik und Werkstoffprüfung. Weitere Anwendungsfelder von inversen Problemen, die auf der Inversion von Integralen längs geodätischer Kurven entsprechender Riemannscher Metriken beruhen, sind die Photoakustische Tomographie [10], die Positronen-Emissions-Tomographie (PET) [19], die Terahertz-Tomographie [13, 30] und die Vektor- und Tensorfeld-Tomographie [24, 26, 28].

Diese Beispiele zeigen, dass beim Lösen inverser Probleme Techniken aus verschiedensten Bereichen der Mathematik – darunter Funktionalanalysis, Theorie partieller Differentialgleichungen, Differentialgeometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und numerische Analysis – eine wichtige Rolle spielen. Häufig führt ein Anwendungsproblem zu interessanten neuen mathematischen Entwicklungen, die wiederum erhebliche Verbesserungen in der Praxis bewirken. Gerade diese reichhaltigen und mitunter überraschenden Interaktionen zwischen den Disziplinen machen den besonderen Reiz dieses Forschungsfeldes aus.

Zur Geschichte der Fachgruppe

Das mathematische Forschungsgebiet der inversen Probleme ist traditionell im deutschsprachigen Raum sehr stark vertreten. Dies ist auf grundlegende Arbeiten von renommierten Mathematikern wie Natterer [19], Hofmann [11], Louis [17], Kress [5], Kirsch [15] oder Engl, Hanke und Neubauer [7][1] zurückzuführen, die Pionierarbeit geleistet und eine neue Generation von Forschenden in diesem Gebiet ausgebildet haben. Neben der Grundlagenforschung stehen dabei vor allem Anwendungen aus der Medizin, der Industrie, den Natur- und Ingenieurwissenschaften im Fokus. In den letzten Jahren haben darüberhinaus auch Konzepte des Maschinellen Lernens großen Einfluss auf die Lösung inverser Probleme gehabt (siehe z. B. [1]). Im deutschsprachigen Raum ergab sich so die besondere Situation, dass ein bedeutender Forschungsschwerpunkt international sichtbar wirkte, jedoch durch keinen Fachverband vertreten war — im Gegensatz zu Bereichen wie Operations Research, (vertreten durch die GOR e.V.) oder Modellierung, Simulation und Optimierung (vertreten durch das KOMSO e.V.). Auch existierte weder eine Fachgruppe in der DMV noch ein Fachausschuss in der GAMM. Auf Initiative von Martin Burger (heute DESY und U. Hamburg) sowie weiterer Mitwirkender entstand die Idee zur Gründung der Gesellschaft für Inverse Probleme (GIP e.V., `https://inverseprobleme.de`) im deutschsprachigen Raum. Die offizielle Gründung erfolgte 2019 im Rahmen des Chemnitz Symposiums On Tour

[1] Weitere, auch neuere, Bücher über inverse Probleme aus dem deutschsprachigen Raum finden sich auf der Webseite `https://inverseprobleme.de/?page_id=140`.

an der Goethe-Universität Frankfurt. Erster Vorsitzender war Thorsten Hohage, der 2023 durch Thomas Schuster abgelöst wurde. Ein zentrales Anliegen der GIP war von Anfang an, nicht nur Professorinnen und Professoren zu vertreten, sondern auch den Nachwuchs einzubinden und gezielt zu fördern. So ist die Mitgliedschaft für Promovierende beitragsfrei; zudem zeichnet die GIP (wie weiter unten näher beschrieben) alle zwei Jahre die beste Dissertation im Bereich der inversen Probleme mit einem Preis aus.

Vernetzung der Fachgesellschaft

Im folgenden gehen wir auf die Vernetzung der GIP im nationalen und internationalen Kontext ein.

Nationale Vernetzung. Von Beginn an verfolgte die GIP das Ziel, nicht isoliert zu agieren, sondern eine enge Anbindung an die beiden großen mathematischen Verbände DMV und GAMM zu schaffen. Diese Ziele wurden erreicht durch die Gründung der Fachgruppe *Inverse Probleme* innerhalb der DMV im September 2022 sowie des gleichnamigen Fachausschusses innerhalb der GAMM im Januar 2025. Um die so entstehenden zusätzlichen Strukturen schlank zu halten, wirken beide Gruppen als Einheit, was durch ein entsprechendes Kooperationsabkommen der drei Verbände ratifiziert wurde. Dies stellt ein Novum bei DMV und GAMM dar und kann vielleicht als Vorbild dienen. Zur Stärkung des Austausches zwischen DMV, GAMM, GOR, KOMSO und GIP finden alle zwei Monate Online-Treffen der Vorsitzenden und Präsidenten dieser Verbände statt. Dies erlaubt es, aktuelle Belange und Entwicklungen auf kurzem Wege zu besprechen. So wurde unter anderem ein Statement zum Thema *Warum ist Mathematik für Künstliche Intelligenz (KI) unentbehrlich?* (www.mathematik.de/images/Mathe-FGs-zu-KI-Position082024mit5UNT.pdf) veröffentlicht, das von allen Vorsitzenden mathematischer Verbände unterzeichnet wurde, um so auf die in der Öffentlichkeit häufig unbeachtete Rolle der Mathematik bei der Erforschung und Entwicklung von KI hinzuweisen.

Internationale Vernetzung. Die GIP unterhält eine enge internationale Kooperation mit der 2022 gegründeten Inverse Problems International Association (IPIA). Die IPIA wurde von Thorsten Hohage ins Leben gerufen und trat die Nachfolge einer informellen Vereinigung an, die 2007 auf Initiative von Gunter Uhlmann (U. Washington) gegründet wurde. Seit 2023 steht Barbara Kaltenbacher (U. Klagenfurt) der IPIA vor, die mittlerweile rund 500 Mitglieder aus aller Welt zählt. Darüber hinaus bestehen enge Beziehungen zur Finnish Inverse Problems Society (FIPS) und der EMS Topical Activity Group on Inverse Problems (EMS-TAG-IP). Ferner zeigt sich die GIP auch präsent bei den beiden bedeutendsten Tagungen, der *Conference on Applied Inverse Problems* (AIP) sowie der *International Conference Inverse Problems: Modelling and Simulation* (IPMS), welche jeweils alle zwei Jahre im Wechsel stattfinden. Als Höhepunkt fand

die AIP 2023 in Göttingen und damit zum ersten Mal in Deutschland statt.

Aktivitäten der Gesellschaft

Zentrale Aktivität der GIP ist die jährlich an wechselnden Orten stattfindende Jahrestagung, das *GIP Annual Meeting*, welches bis 2023 unter dem Namen *Chemnitz Symposium on Inverse Problems* firmierte. Dieses geht zurück auf die Initiative von Bernd Hofmann (TU Chemnitz), welcher im Jahre 2002 erstmals dieses Symposium in Chemnitz organisierte. Im Jahre 2009 ging das Chemnitz Symposium zum ersten Mal *on tour* in Linz und fand in den Folgejahren abwechselnd in Chemnitz und im Ausland statt, unter Anderem in Shanghai, Rio de Janeiro, und Canberra. War das Symposium 2002 noch eine eintägige Veranstaltung bestehend aus fünf deutschen Vorträgen, so ist das GIP Annual Meeting mittlerweile ein internationaler Workshop, der sich in der Regel über zweieinhalb Tage erstreckt. Die Vorträge decken dabei nicht nur den Kernbereich der inversen Probleme ab, sondern behandeln viele verwandte Themengebiete und Anwendungen sowie in den letzten Jahren vermehrt auch das Maschinelle Lernen. Ergänzt werden diese Tätigkeiten zukünftig durch Aktivitäten der Fachgruppe beziehungsweise des Fachausschusses in DMV und GAMM. Erwähnenswert ist insbesondere der alle zwei Jahre ausgelobte Preis für die beste Dissertation auf dem Gebiet der inversen Probleme, welche an einer Hochschule im deutschsprachigen Raum angefertigt worden sein muss. Alle Nominierungen werden von einem internationalen Komitee begutachtet. Der Preis wird im Rahmen des GIP Annual Meetings verliehen, wo die Preisträgerin beziehungsweise der Preisträger einen Vortrag über das Thema der Dissertation halten darf und ein Preisgeld erhält. Der Promotionspreis erging erstmals 2020 an Frederic Weidling (U. Göttingen), 2022 gemeinsam an Tram Thi Ngoc Nguyen (U. Klagenfurt) und Sebastian Neumayer (TU Berlin) und 2024 an Marvin Knöller (KIT Karlsruhe). Aktuell werden Nominierungen bis zum 28. Februar 2026 angenommen.

Literatur

[1] S. Arridge, P. Maass, O. Öktem, and C.-B. Schönlieb. Solving inverse problems using data-driven models. *Acta Numerica*, 28:1–174, 2019.

[2] K. Astala and L. Päivärinta. Calderón's inverse conductivity problem in the plane. *Ann. Math.*, 163(1):265–299, 2006. doi:10.4007/annals.2006.163.265.

[3] A. P. Calderón. On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980)*, pages 65–73. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1980.

[4] C. Clason. Regularization of Inverse Problems, 2020. arXiv:2001.00617.

[5] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 4th edition, 2019. 1st ed. 1992.

Teilnehmende des GIP Annual Meeting 2024 an der Universität Siegen

Verleihung des Promotionspreises der GIP 2024 an Dr. Marvin Knöller (KIT Karlsruhe, links)

[6] R. Courant and D. Hilbert. *Methoden der Mathematischen Physik*, volume 48 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Julius Springer, 1937.

[7] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*, volume 375 of *Mathematics and its Applications*. Springer Netherlands, 1996. doi:10.1515/9783110208276.

[8] T. Ghosh, A. Rüland, M. Salo, and G. Uhlmann. Uniqueness and reconstruction for the fractional Calderón problem with a single measurement. *J. Funct. Anal.*, 279(1):108505, 42, 2020. doi:10.1016/j.jfa.2020.108505.

[9] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, 1923. URL: https://archive.org/details/lecturesoncauchy00hadauoft.

[10] M. Haltmeier, T. Schuster, and O. Scherzer. Filtered backprojection for thermoacoustic computed tomography in spherical geometry. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 28(16):1919–1937, 2005.

[11] B. Hofmann. *Mathematik inverser Probleme*. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1999.

[12] T. Hohage and F. Werner. Inverse problems with Poisson data: statistical regularization theory, applications and algorithms. *Inverse Problems*, 32:093001, 56, 2016. doi:10.1088/0266-5611/32/9/093001.

[13] S. Hubmer, A. Ploier, R. Ramlau, P. Fosodeder, and S. van Frank. A mathematical approach towards THz tomography for non-destructive imaging, 2020. arXiv:2010.14938.

[14] J. B. Keller. Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, 83(2):107–118, 1976. doi:10.2307/2976988.

[15] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, New York, 3rd edition, 2021. 1st ed. 1996. doi:10.1007/978-1-4419-8474-6.

[16] M. Lassas, T. Liimatainen, Y.-H. Lin, and M. Salo. Inverse problems for elliptic equations with power type nonlinearities. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 145:44–82, 2021. doi:10.1016/j.matpur.2020.11.006.

[17] A. K. Louis. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner Studienbücher Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1989. doi:10.1007/978-3-322-84808-6.

[18] A. Nachman. Global uniqueness for the two-dimensional inverse boundary-value problem. *Ann. Math.*, 142:71–96, 1995.

[19] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, 2001. Reprint of the 1986 original.

[20] R. Nickl. *Bayesian Non-linear Statistical Inverse Problems*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS Press, Berlin, 2023. doi:10.4171/zlam/30.

[21] R. G. Novikov. A multidimensional inverse spectral problem for the equation $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 22(4):11–22, 96, 1988. doi:10.1007/BF01077418.

[22] A. Rieder. *Keine Probleme mit inversen Problemen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2003. doi:10.1007/978-3-322-80234-7.

[23] O. Scherzer, M. Grasmair, H. Grossauer, M. Haltmeier, and F. Lenzen. *Variational Methods in Imaging*. Springer, New York, 2009. doi:10.1007/978-0-387-69277-7.

[24] T. Schuster. 20 years of imaging in vector field tomography: a review. *Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT)*, pages 389–424, 2008.

[25] T. Schuster, B. Kaltenbacher, B. Hofmann, and K. S. Kazimierski. *Regularization Methods in Banach Spaces*, volume 10. Walter de Gruyter, 2012.

[26] V. A. Sharafutdinov. *Integral Geometry of Tensor Fields*, volume 1. Walter de Gruyter, 2012.

[27] S. Siltanen, J. Mueller, and D. Isaacson. An implementation of the reconstruction algorithm of A. Nachman for the 2D inverse conductivity problem. *Inverse Problems*, 16(3):681–699, 2000. doi:10.1088/0266-5611/16/3/310.

[28] G. Sparr and K. Strahlen. Vector field tomography: an overview. *IMA Volumes in Mathematics and its Applications; Computational Radiology and Imaging: Therapy and Diagnostic*, 110, 1998.

[29] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. Math.*, 125:153–169, 1987.

[30] J. Tepe, T. Schuster, and B. Littau. A modified algebraic reconstruction technique taking refraction into account with an application in terahertz tomography. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 25(10):1448–1473, 2017.

Prof. Dr. Christian Clason
Institut für Mathematik und wissenschaftliches Rechnen, NAWI Graz, Universität Graz
Heinrichstr. 36, 8010 Graz
c.clason@uni-graz.at

Prof. Dr. Thorsten Hohage
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen
Lotzestraße 16–18, 37083 Göttingen
hohage@math.uni-goettingen.de

Prof. Dr. Thomas Schuster
Fachrichtung Mathematik, Universität des Saarlandes 66123 Saarbrücken
thomas.schuster@num.uni-sb.de

Christian Clason ist Professor für Mathematische Optimierung an der Karl-Franzens-Universität Graz. Sein Forschungsgebiet liegt in der nichtglatten Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen mit Anwendungen in der Parameteridentifikation.

Thorsten Hohage ist Professor für Inverse Probleme and der Georg-August-Universität Göttingen und Fellow am Max-Planck Institut für Sonnensystemforschung. Seine Forschungsinteressen gelten Inverse Problemen in partiellen Differentialgleichungen, Regularisierungstheorie und bildgebenden Verfahren in Röntgen- und Elekronenmikroskopie sowie Helioseismologie.

Thomas Schuster ist Professor für Numerische Mathematik an der Universität des Saarlandes Saarbrücken. Er beschäftigt sich mit Inversen Problemen von der Grundlagenforschung in Banach- und Bochner-Räumen über Anwendungen in der tomographischen Bildgebung bis hin zum Einsatz Maschinellen Lernens.