Übungsblatt 14

Aufgabe 14.1

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, d.h. es gebe Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $|f|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ ein Minimum annimmt.
Hinweis: Der Satz über Existenz von Minima stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen ist nicht unmittelbar anwendbar, da $\mathbb{R}$ kein kompaktes Intervall ist, aber vielleicht fällt Ihnen etwas ein, um diesen Defekt zu umgehen.

Aufgabe 14.2

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Seien $a_0 < b_0$ mit $f(a_0)f(b_0) \leq 0$, d.h., $f(a_0)$ und $f(b_0)$ haben nicht das gleiche Vorzeichen. Wir definieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt:

- falls $f(a_{n-1})f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \leq 0$ gilt, setzen wir $a_n = a_{n-1}$ und $b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$;
- falls $f(a_{n-1})f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) > 0$ gilt, setzen wir $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ und $b_n = b_{n-1}$.

Zeigen Sie, dass $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung ist, und

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x^*\} \quad \text{und} \quad f(x^*) = 0.$$

Anwendung: Sei $f(x) = x^3 - x - 2$ und $a_0 = 1$, $b_0 = 2$. Berechnen Sie a_n, b_n mit $n = 1, \ldots, 7$.

Aufgabe 14.3

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+7}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Aufgabe 14.4

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in K$ gilt: Ist $|x - y| < \delta$, so ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Eine Funktion mit dieser Eigenschaft heißt *gleichmäßig stetig.*
Hinweis: Nehmen Sie an f sei nicht gleichmäßig stetig und konstruieren Sie für gegebenes $\varepsilon > 0$ zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Nutzen Sie anschließend, dass jede Folge in K einen Häufungswert in K besitzt.