Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(2n-1)!(-7)^n}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 12.2

Die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ seien $R_a \in (0, \infty)$ bzw. $R_b \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ einen Konvergenzradius $R \geq R_a R_b$ hat. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $R > R_a R_b$ gilt.

Aufgabe 12.3

Untersuchen Sie die folgenden Potenzreihen

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(3+(-1)^n)^n} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2} z^n$$

auf Konvergenz.
Hinweis: Bestimmen Sie den Konvergenzkreisradius R (Skizze). Für das Konvergenzverhalten am Rand des Konvergenzkreises setzen Sie $z = Rw$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $|w| = 1$.

Aufgabe 12.4

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *asymptotisch gleiche Folgen* positiver Zahlen, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent sind.
Anwendung. Für welche $s \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^s}} - 1 \right).$$