Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1

(a) Zeigen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und der Beschränkheit der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ folgt.

(b) Sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent aber nicht notwendig absolut konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

Aufgabe 11.2

Sei $p > 1$. Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{p^k}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die abelsche Summation aus Aufgabe 6.2 mit $a_k = \dfrac{1}{p^k}$ *und* $b_k = k$.

Aufgabe 11.3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\right)^{n^2}, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}, \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+5}{3n^4 - n^3 - 17}.$$

Aufgabe 11.4

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden reellen Potenzreihen:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}, \quad p \in \mathbb{Z}, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n, \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$