Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie, dass die Folge $z_n = i^n + \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, mindestens vier Häufungswerte hat.

Aufgabe 10.2

Finden Sie alle Lösungen von

$$z^6 = 1$$

und zeichnen Sie deren Lage in der komplexen Ebene ein.
Hinweis: Faktorisieren Sie das Polynom $z^6 - 1$.

Aufgabe 10.3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 = 1, a_2 = 2$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} \quad \text{für alle} \quad n \geq 2.$$

Weisen Sie nach, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 10.4

Wir definieren eine Folge durch

$$a_n := \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
Hinweis: Betrachten Sie $m := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *die größte ganze Zahl* $\leq \sqrt{n}$. *Unterteilen Sie die Summe in zwei Teilsummen und zeigen Sie, dass*

$$a_n \leq \frac{m-1}{n} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)}.$$