Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_n := \frac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2 - 5n + 4}$$

konvergiert und geben Sie den Grenzwert a an. Geben Sie außerdem für alle $\varepsilon > 0$ ein N_ε an, sodass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

Aufgabe 9.2

Bestimmen Sie ob die folgenden Folgen konvergieren, und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(a) $0 < a_0 \leq 1$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ für $n \geq 0$. *Hinweis: Betrachten Sie* $a_{n+1} - a_n$.

(b) $a_0 > 0$ und $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$ für $n \geq 0$. *Hinweis: Betrachten Sie* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Aufgabe 9.3

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$(a)\ \left(\frac{(n-1)(n^2+1)}{(2n+1)(3n^2-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (b)\ \left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (c)\ \left(\frac{n\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Hinweis: Für (c) können Sie Aufgabe 8.3 verwenden.

Aufgabe 9.4

Seien α, β positive reelle Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch

$$a_n := \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \max\{\alpha, \beta\}$.

Aufgabe 9.5

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Entscheiden Sie, unter Annahme von (a) respektive (b) und (c), ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) $(a_{2n})_n$, $(a_{4n-1})_n$ und $(a_{4n+1})_n$ sind konvergent.

(b) $(a_{2n})_n$, $(a_{2n-1})_n$ und $(a_{3n})_n$ sind konvergent.

(c) alle Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergent.