# Übungsblatt 8

### Aufgabe 8.1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$(a) \quad z^2 = 2i, \qquad\qquad (b) \quad z^2 + 3z + \frac{3}{2} - i = 0.$$

Geben Sie dabei Real- und Imaginärteil der Lösung(en) an!

### Aufgabe 8.2

Untersuchen Sie, welche Teilmenge von $\mathbb{C}$ durch folgende Bedingungen festgelegt wird und stellen Sie sie in der Gauß'schen Zahleneben dar:

(a) $\left|\frac{z-i}{z-2+i}\right| = 1$.

(b) $|z-2| < \mathrm{Im}(z) + 2$.

### Aufgabe 8.3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Finden Sie weiterhin Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, aber weder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind.

### Aufgabe 8.4

Die Absicht der Pythagoräer, am regelmäßigen 5-Eck die Kommensurabilität von Diagonale und Seite nachzuweisen, führte Sie auf den Kettenbruch

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

Darunter versteht man die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_0 = 1$ und

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

(a) Zeigen Sie $x_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Sei $g$ die positive Lösung der Gleichung $g^2 - g - 1 = 0$. Zeigen Sie

$$|x_{n+1} - g| = \frac{|x_n - g|}{x_n g} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Hinweis: Zeigen und benutzen Sie die Identität* $g = 1 + \frac{1}{g}$.

(c) Verwenden Sie (a) und (b), um zu beweisen, dass

$$|x_n - g| \leq \frac{1}{g^{n+1}}.$$

Zeigen Sie anschließend, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$.