Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und entweder $x_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$ oder $-1 < x_i \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie in beiden Fällen die Gültigkeit der Ungleichung

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Aufgabe 6.2

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ die *Abelsche Summation*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k)$$

wobei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist.

Aufgabe 6.3

Bestimmen Sie, sofern diese existieren, Infimum, Minimum, Supremum und Maximum der folgenden Mengen:

a) $\left\{ \frac{x}{x+1} \,|\, x \in [0, \infty) \right\}$,

b) $\left\{ 2x^2 - x^4 \,|\, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 6.4

Es seien $(I_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $(J_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $J_n = [c_n, d_n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ Intervallschachtelungen für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$, wobei $a_0, c_0 > 0$ gelten soll.
Zeigen Sie, dass $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $H_n = [a_n c_n, b_n d_n]$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Intervallschachtelung für xy ist.